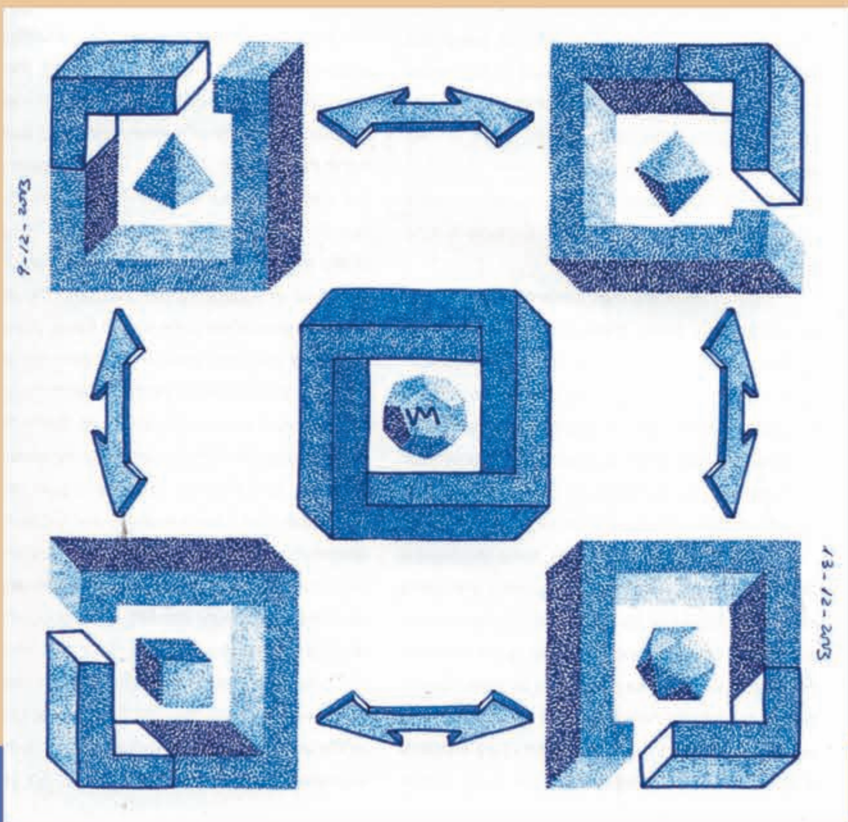
ISSN 0130–2221
2008 · №2
МАРТ/АПРЕЛЬ

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



Слева представлен процесс «сборки» невозможного объекта (в центре композиции), создаваемого наложением изображений четырех заготовок (реальных!), каждая из которых представлена со своей «точки зрения».

«НЕВОЗМОЖНЫЕ» ОБЪЕКТЫ

Современный испанский художник и математик Висенте Мевилла Сегуи – автор ряда изобразительных сюжетов, главными героями которых выступают фигуры-иллюзии.

Иллюзорная лента справа закручена в форме восьмерки. Ее обрамляют изображения числа 8 в различных письменностях.

В. Алексеев

журнал© Квант
МАРТ АПРЕЛЬ 2008 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

К 100-летию И.К.Кикоина

2 Об Исааке Константиновиче Кикоине. *А.Боровой*

7 Физика ядерного взрыва. *Л.Белопухов*

11 Две знаменитые формулы. *В.Вавилов, А.Устинов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

16 Задачи М2081–М2085, Ф2088–Ф2092

17 Решения задач М2056–М2065, Ф2073–Ф2077

К М Ш

23 Задачи

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

24 Будет ЕГЭ по математике! *Л.Денищева, Б.Писаревский*

29 ЕГЭ по физике. *М.Демидова, А.Черноуцан*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

32 По порядку становись!

ВАРИАНТЫ

36 Материалы вступительных экзаменов 2007 года

ОЛИМПИАДЫ

49 XLVIII Международная математическая олимпиада

52 XXXVIII Международная физическая олимпиада

56 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к статье Л.Белопухова*

II *«Невозможные» объекты*

III *Шахматная страничка*

IV *Коллекция головоломок*

В праздновании 100-летнего юбилея академика И.К.Кикоина финансовое участие принимает ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»

Квант

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

Бюро Квантум

К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

Об Исааке Константиновиче Кикоине

А.БОРОВОЙ

Я пришел на работу в «Курчатовский институт» в начале 60-х годов теперь уже прошлого века. Лаборатория помещалась на втором этаже трехэтажного здания, носящего название «Главное». С этого здания начинался Институт. В нем, еще не до конца достроенном, в 1943 году И.В.Курчатов со своими немногочисленными сотрудниками проводил первые исследования по созданию атомного оружия. А через двадцать лет над помещениями нашей лаборатории, на третьем этаже, размещалась дирекция, в том числе и кабинет директора – академика Анатолия Петровича Александрова.

Нельзя сказать, что работать в таком престижном месте было особенно комфортно. В дирекцию привозили иностранные делегации, приезжало начальство из министерства, прибывали многозвездные генералы, а изредка и члены Правительства. Поэтому проскакивать по лестницам со свинцовыми кирпичами, контейнерами с радиоактивными источниками или дюарами, наполненными жидким азотом, приходилось максимально быстро. Нельзя было шуметь в коридорах. Рекомендовалось также ходить в чистом и выглаженном халате, что при характере нашей работы представляло известную трудность. С другой стороны, наш балкон, нависающий над подъездом, являл собой идеальный наблюдательный пункт для знакомства с «великими людьми», посещавшими Директора. Именно с этого балкона в 1961 году мы наблюдали встречу Анатолия Петровича с Нильсом Бором, приехавшим в «Курчатовский институт».

Однажды, когда мы стояли на балконе, один из старожилов лаборатории показал на выходящего из машины очень худого высокого человека и сказал: «Смотри, Кикоин приехал». В те времена имена создателей атомного оружия были известны куда менее широко, чем сейчас. Поэтому я тотчас же начал его расспрашивать о том, кто это, откуда и чем знаменит. « Исаак Константинович – заместитель нашего директора, начальник Отделения молекулярной физики (раньше, из-за секретности, его называли отделом приборов теплового контроля). Замечательный человек. Сотрудники в нем души не чают, за глаза называют И.К. Да, самое главное, он академик, дважды герой, научный руководитель большой отрасли промышленности».

Сейчас я мог бы добавить к этой краткой характеристике, что самым главным все-таки было то, что Кикоин – выдающийся физик. Хотел написать «выдающийся ученый» и вспомнил, что сам Исаак Константинович с большой осторожностью и уважением относился к слову «ученый» и вообще был скуп на хвалебные определения. На моей памяти звания «ученый» удостаивались от него только немногие классики науки. В этом он походил на своего друга – Льва Давидовича Ландау. Последний, как рассказывают, на каком-то торжественном приеме при словах «Провозгласим этот тост за славных советских ученых!», для того чтобы смягчить неловкость момента, с места (но громко) произнес: «Учеными бывают только коты и секретари!»

По моим балконным наблюдениям, Кикоин не особенно часто посещал Главное здание – кабинеты центральной дирекции. Как говорили, Александров любил ездить к нему сам.

* * *

Прошло несколько лет. Мы с тремя моими товарищами написали книгу «Механика», и издательство «Наука» готовилось опубликовать ее в «Библиотечке физико-математической школы», выходящей под редакцией Я.А.Смородинского (книга появилась в 1967 году). В этот период ожидания знаменательного для авторов события в нашей лаборатории раздался звонок, и вежливый женский голос поинтересовался, не могу ли я вечером, часов в 7, прийти к академику Кикоину. Пропуск будет заказан.

Отделение молекулярной физики помещалось достаточно далеко от Главного здания. Все время, пока я шел через парк, минуя десятки корпусов разросшегося института, я продолжал волноваться и гадать, что же могло заинтересовать академика, пытался представить себе возможную тему разговора и подготовиться к ответам на вопросы, если они будут. Вряд ли Кикоин будет говорить о нейтринной физике, которой занималась наша лаборатория. В этом случае он обратился бы к ее руководству, понимающему проблемы существенно лучше, чем молодой специалист. Тогда о чем?

Статья печатается с сокращениями. Полный текст опубликован в выпуске 106 «Библиотечки «Квант». (Прим. ред.)

Мысль о «Механике» в голову мне не приходила.

Когда я, наконец, попал в кабинет Кикоина, академик предложил мне садиться и сразу же заговорил о теме нашей встречи. «Смородинский дал мне прочитать рукопись Вашей книги «Механика». Поэтому хотелось бы поговорить о школьных учебниках по физике. Из книжки довольно ясно видно, что Вас они не устраивают. Я не ошибаюсь?» Я подтвердил, что мы имеем серьезные претензии и к учебникам, и к методам преподавания физики в школе. Начал объяснять более подробно, сначала волновался и говорил достаточно путанно, потом, увидев, что И.К. удобно устроился в своем кресле и внимательно слушает, иногда даже одобрительно кивает, успокоился и аргументировал свою точку зрения более связно. Насколько помню, говорил я в основном о трех вещах. О совершенно не современном изложении материала – для учащихся физика остановилась в лучшем случае на рубеже XIX и XX веков. О том, что написанное в учебниках чаще всего представляет собой набор отдельных глав. Нет единого подхода. Исчезает единый метод физики. Даже, помню, привел слова Декарта – «наблюдение, размышление, опыт», чем вызвал легкую улыбку собеседника. Наконец, о том, что курс школьной физики совершенно не учит решать задачи.


И.К.Кикоин в своем кабинете

Следующий вопрос академика был о том, какое отношение мы имеем к преподаванию физики в школе. Я объяснил, что все началось с комсомольского поручения дать несколько дополнительных занятий в подшефной школе. Понравилось и слушателям и нам. Организовали постоянно действующий физический кружок, в который стали приходить ребята из многих школ района. Готовим их к поступлению в трудные технические вузы. Сознался, что дома занимаемся и частным репетиторством. «Я в свое время, когда учился, прирабатывал, давая уроки, и считался в Пскове лучшим репетитором по физике и математике», – успокоил мою совесть академик.

Выслушав меня, И.К. заговорил сам. Медленно и очень тихо, так что я вначале даже не все разбирал, но потом приспособился и слушал со всем возможным вниманием. Кикоин рассказывал о том, что ясно видит необходимость не просто улучшить преподавание физики в школе, а совсем по-новому подойти к нему. «Сейчас сплошь и рядом физика находится на задворках учебного процесса, не редки случаи, когда в сельских школах ее преподают учителя физкультуры. По созвучию, наверное, выбирают. А ведь теперешним ребятам жить в мире сложнейшей техники». Говорил о том, насколько важен вопрос «КАК учить», что успех обучения на 90% зависит от учителя, который должен заинтересовать школьников, а физика далеко не такой выигрышный предмет, как, например, история. «Конечно, надо начинать с подготовки учителей, с педагогических институтов, которых достаточно много, но которые очень бедны и совсем не престижны.... Вот видите, сколько вопросов, сколько направлений для работы. И пока только на одном существенные сдвиги – решено, что будут создаваться новые школьные учебники по физике. Я поэтому хотел поговорить с Вами, чтобы предложить вместе с Вашими товарищами в этом поучаствовать».

Совершенно неожиданное предложение! Я честно сказал, что ответить на него не готов, надо посоветоваться с соавторами и все обдумать. Наверное, возникнет много вопросов. «Хорошо, подумайте». Еще некоторое время И.К. разбирал достоинства и недостатки нашей «Механики» (последних оказалось существенно больше). На этом мы и расстались.

После ожесточенных споров с моими соавторами мы пришли к двум выводам. Садиться за написание школьных учебников – означало на несколько лет посвятить себя исключительно этой работе. Слишком большое и ответственное это дело. А мы только-только начинали свой путь в физике, ничего еще в ней путного не сделали. Прервать сейчас на некоторое время научную работу – это наверняка означает навсегда с ней проститься и стать педагогом. Наш первый вывод гласил – от написания учебников надо отказаться. С другой стороны, совсем прекращать преподавание мы не собирались. Более того, уже формировалась идея создать при «Курчатовском институте» вечернюю физико-математическую школу для одаренных детей и учить их там по своим методикам. Поэтому второй вывод – предложить Исааку Константиновичу использовать нашу школьную аудиторию для проверки его идей, которые будут заложены в новом курсе физики.

Эти два вывода я сообщил академику по телефону и получил его одобрение на дальнейшее сотрудничество. С тех пор посещения кабинета И.К. стали достаточно частыми. Сначала мы появлялись там все вместе. Однако различные житейские причины привели к тому, что я все чаще стал приходить один, особенно после того, как был основан журнал «Квант» и я стал отвечать за раздел «Лаборатория «Кванта».

* * *

К сожалению, за прошедшие десятилетия мои воспоминания стали напоминать старый фильм. Иногда пленка рвется, часто мелькают стертые кадры, пропадает звук. Но вдруг на каком-то месте возникает цвет, сцены наполняются звуком и смыслом. О них я и хочу рассказать.

Место действия почти всегда одно и то же – кабинет Исаака Константиновича. Высокий, очень худой, в неизменном своем черном костюме, он сидит в кресле за большим письменным столом и держит в руках потухшую трубку. За креслом и по другим стенам кабинета располагаются книжные шкафы. Книги, книги, книги. На русском языке, немецком, английском. Книги по физике, инженерным наукам, справочники, словари ... В огромном кабинете жарко, я постоянно вытираюсь платком, а И.К., по-видимому, зябнет. Ходят слухи, что он до сих пор не до конца победил туберкулез и что у него больной желудок. Иногда я задаю вопросы, не относящиеся прямо к теме нашей встречи. Академик отвечает и начинает рассказывать о чем-нибудь. Несмотря на тихий голос рассказчик он замечательный.

* * *

«Где учился я сам? Когда переехали в Псков, а было это в 21 году, то перешел в школу, которая находилась через несколько домов от нашего. Трудовую школу №1, бывшую Первую гимназию, знаменитую во Пскове. Чем знаменитую? Во-первых, возрастом – открылась она еще при Александре I. Во-вторых, прекрасным преподавательским составом. В-третьих, конечно, своими выпускниками». Академик перечисляет несколько действительно знаменитых фамилий. Я запомнил писателей Ю.Тынянова и В.Каверина, микробиолога Л.Зильберта и еще скрипачку Г. Баринову.

«В эти годы школа, как и вся страна, была очень бедной. Ставок преподавателей не хватало. Не было заведующего физическим кабинетом, не было библиотекаря. И через некоторое время мне предложили, на общественных началах, привести в порядок библиотеку (а это были десятки тысяч томов) и постараться наладить хоть какие-нибудь демонстрации по физике. Как говориться, «не было бы счастья, да несчастье помогло». Я все свободное время либо сортировал и запоем читал в библиотеке книги, в основном по физике и математике, либо придумывал демонстрации по физике и часто сам собирал нужные приборы. Именно тогда и решил твердо, что стану физиком».

Замечу, что эти увлечения, очевидно, не отражались на общей успеваемости И.К., поскольку школу он окончил в 15 лет, дважды «перескочив» через класс. Позднее я узнал, что Исаак Константинович ездил на празднование 180-летия первой гимназии и выступал там перед учащимися и преподавателями.

* * *

По мере общения с И.К. я все больше убеждался в его превосходной памяти. Обычно в конце наших встреч он интересовался моими рабочими делами и новостями в области нейтринной физики. И вот, рассказывая както о знаменитых опытах группы американского профессора Ф. Рейнеса, я привел величины сечения взаимодействия реакторных антинейтрино с протоном и дейтоном. Через несколько месяцев, когда И.К. спросил, как обстоят дела с моей диссертацией, я стал рассказывать о предполагаемой скорости счета проектируемого детектора, а он на какой-то бумажке, валявшейся на столе, карандашом быстро проверил мои расчеты (слава Богу, результаты совпали). Только через несколько минут до меня дошло, что И.К. откуда-то знает нейтринные сечения. Я у него спросил об этом и получил обескураживающий ответ: «Но Вы же сами мне их назвали тогда-то и тогда-то».

Вот что рассказывал сам И.К.: «Я никак не могу пожаловаться на свою память. Например, когда я занимался репетиторством, то перерешал все задачи из задачника по математике. И на вступительном экзамене в Ленинградский политехнический институт я даже не читал условие задачи, а смотрел на номер, который указывал преподаватель, и сразу говорил ответ. Он проверял и каждый раз очень удивлялся. А я объяснял, что задача легкая и ее можно решить устно. И лекции никогда не записывал, сразу запоминал. Очень много раз в жизни меня буквально спасала хорошая память. А иногда она здорово помогала другим людям».

И дальше последовал один из интересных рассказов И.К., который я постараюсь воспроизвести.

«Это было в начале пятидесятых годов. Тогда во всю шла борьба с низкопоклонством перед зарубежной наукой. Может быть, в этой кампании и были рациональные зерна, но они очень скоро оказались буквально погребены под грудой невежественных статей, выступлений и просто доносов. С их помощью люди, которые не могли или не хотели заниматься настоящей наукой, пытались расчистить себе путь наверх.

Вы, конечно, знаете сами, как это сказалось на нашей биологии. Она была буквально отброшена на десятилетия назад. Атаковали и физику, теорию относительности, квантовую механику. Заявляли, что это насквозь ложные, буржуазные науки. Хорошо еще не обзывали их так, как кибернетику. Но здесь борцам с низкопоклонством пришлось довольно быстро отступить. Не буду подробно об этом рассказывать, но в 52 году многие из тех, кто работал в атомном проекте (я в том числе), обратились в Правительство с просьбой прекратить спекуляции вновь явленных философов на тему о буржуазности теории относительности и квантовой механики. Мы просили опубликовать статью академика В.А.Фока, в которой все ставилось на свои места. Я знаю, что Игорь Васильевич Курчатов дополнительно говорил об этом на самом верху: если вся современная наука не верна, то и атомное оружие создать нельзя, надо прекращать работу. Этот аргумент оказался самым сильным и, говорят, был даже доложен Сталину. Статью Фока опубликовали, все нападки прекратились.

* * *

На одной из наших встреч я спросил И.К., готовится ли он специально к своим лекциям и научным докладам. Какими приемами добивается того, чтобы изложить сложную тему и быть до конца понятым аудиторией? К сожалению, моя память сохранила только отрывки из того, что сказал по этому поводу своим тихим голосом академик.

«Вот Абрам Федорович <А.Ф.Иоффе, учитель И.К. – *А.Б.*> говорил, что научный доклад не должен напоминать детектив. Слушатели еще в самом начале должны знать и главную цель работы, и главные ее трудности, и что сделано нового. Потом можно переходить к деталям. Иоффе на одном из наших семинаров процитировал записку Марка Твена к докладчику: «Если в Ваших словах есть какой-либо смысл, то не стесняйтесь и сообщите его. Надо уважать слушателей. Нельзя, махнув указкой на таблицу в двадцать строк и в десять столбцов, всю заполненную цифрами, сказать, что из нее легко видеть, что то-то и то-то верно, а это не верно, и быстро перейти к следующему плакату».

Помню, что И.К. посетовал, что особенно трудно выступать перед аудиторией, компетентность которой неизвестна. И привел, в качестве примера, случай, который произошел при работе над атомным проектом: «Курчатов попросил провести «ликбез» по вопросу разделения изотопов для высшего руководства. Поскольку все выглядели очень деловыми и знающими, я изложил свои соображения подробно. Да еще и увлекся темой. Когда кончил – взглянул на слушателей и по их виду понял, что они в полном недоумении. Что было делать, начинать все сначала? Спас меня Игорь Васильевич. Начал задавать простейшие вопросы, один за другим. Я отвечал максимально популярно и подробно. Так вдвоем и добились понимания».

* * *

В одно из посещений речь зашла об управляемой термоядерной реакции. И.К. держал перед собой недавно изданную нашу книгу «Законы электромагнетизма» из серии «Библиотечка физико-математической школы» и высказывал свои замечания. «Почему Вы пишете, что создание термоядерной энергетики – дело ближайшего будущего? Насколько ближайшего? Я думаю, что будет очень хорошо, если Ваши дети застанут это «будущее», но что-то сильно в этом сомневаюсь».

Надо сказать, что фраза о термоядерной энергетике в книге вообще совершенно лишняя. Ничего больше об этом предмете там нет, просто авторам, постоянно упоминавшим Ампера, Фарадея, Максвелла, захотелось показать свою современность и разносторонность. Тем не менее, я искренне удивился: «Как же так, постоянно всюду пишут, что скоро человечество термоядом овладеет. Надо увеличить размер камеры- бублика, и хотя это технически трудная задача, но вполне разрешимая. И даже Курчатов говорил ...»

Тень набежала на лицо академика, какая-то горькая тень, и он проговорил еще тише, чем обычно: «Игорь Васильевич был прекрасным физиком, но никто не мог предвидеть всех трудностей. Даже человек такого масштаба, как он. В самом начале 50-х годов мы обсуждали эту проблему, он предлагал работать над ней вместе, настаивал. Я сначала загорелся и даже сконструировал бублик. Но через некоторое время понял, что положительные результаты могут быть получены через долгое время, значительно превышающее пределы моей жизни. И решил заниматься другими, тоже очень важными и интересными работами».

* * *

Перечитываю то, что написал, и с сожалением сознаю, что во время моего общения с И.К. я даже представить себе не мог, какую гигантскую работу по своей «главной специальности» он вел в это время. Понадобились эти прошедшие десятилетия, за время

И.К.Кикоин получает Почетную грамоту Министерства просвещения которых постепенно рассекречивались и появлялись в печати подробности осуществления атомного проекта, чтобы начать это понимать. Но и тогда, общаясь с сотрудниками Исаака Константиновича, я со временем узнал, что его рабочий день превышал 12 часов. Утром в 8.30 он приезжал из дома и шел в свой кабинет, чтобы ознакомиться с неотложными делами и подписать срочные бумаги. В 9–10 часов брал с собой главного инженера и обходил экспериментальные лаборатории и производственные подразделения. Здесь, непосредственно на месте, обсуждались и решались возникшие вопросы, раздавались поручения. К 11 часам он приходил в корпус разделения изотопов к «вертушкам» (центрифугам) и садился там в зале. Любой сотрудник мог подойти к нему со своими вопросами. Потом И.К. возвращался в свой кабинет и продолжал заниматься делами, общаться с вызванными или пришедшими к нему по своей инициативе сотрудниками. Иногда ездил в разные инстанции. Рабочий день оканчивался часов в 9–10 вечера. Наши вечерние беседы, несмотря на то что секретарь И.К. переносил на следующий день не особо срочные телефонные обращения, постоянно прерывались срочными звонками, часто междугородними. Иногда раздавался настойчивый сигнал белого телефона, на котором не было диска, а был только золотой герб, – «кремлевки». Я выходил из кабинета и ожидал окончания разговора. Когда мы засиживались до очень позднего времени, И.К., выходя из подъезда, часто указывал мне на светившиеся в здании окна и говорил: «Есть ребята и более усидчивые, чем мы с Вами».

Для его работы над учебниками были отведены редкие выходные дни.

Перед каждым Новым годом И.К. совершал обход буквально всех сотрудников своего отделения (сотни человек!), поздравлял, справлялся о здоровье и жизни.

* * *

Исаак Константинович сам был остроумным человеком и умел ценить шутки других. Пожалуй, одна из наиболее известных веселых историй касалась подарка, который сделал ему Анатолий Петрович Александров. Директор «Курчатовского института» подарил своему заместителю замечательный набор – большой самовар из стекла и стоявший на нем стеклянный заварной чайник. В самовар была налита прозрачная жидкость, как вскоре выяснилось водка, в чайнике находился коричневый напиток – коньяк. Подарок вызвал смех и некоторое изумление, поскольку было известно, что И.К. абсолютный трезвенник. Но скоро все объяснилось. После того как самовар с чайником поставили в комнате отдыха Кикоина, Анатолий Петрович стал изредка жаловаться своим сотрудникам, что он устал и ему надо поехать к И.К., попить его замечательного чайку. Академики уединялись, и один пил настоящий чай, а второй прихлебывал свой, дареный. На «чай» к Кикоину Александров иногда привозил и наиболее важных (или особенно приятных ему) гостей, вплоть до членов Политбюро.

Мне запомнилась шутка И.К., обращенная лично ко мне. Несколько месяцев я болел, лежал в больнице, и академик об этом знал. Придя на работу, в один из дней я с помощью своего наблюдательного пункта на балконе увидел приближавшуюся машину И.К. и побежал на первый этаж, чтобы встретить его еще в вестибюле. Академик поздоровался и очень грозно мне сказал: «Вы что же это, сударь, носитесь здесь, как приказчик? Извольте ходить, как купец первой гильдии! Положение-с обязывает».

* * *

Физико-математическая школа при «Курчатовском институте» успешно работала, стала называться ШЕН – Школа естественных наук – и осенью 1984 года была награждена Почетными грамотами Министерства просвещения и ЦК ВЛКСМ. Грамоты вручались в торжественной обстановке в большом зале Дома культуры «Курчатовского института». Выступали представители Министерства и комсомольские начальники, а от Дирекции института награды принимали два академика – Спартак Тимофеевич Беляев и Исаак Константинович Кикоин.

Первым говорил С.Т.Беляев, и его выступление сильно контрастировало с предыдущими казенными словами чиновников. Он говорил о том, что в процессе обучения учатся обе стороны – и ученик, и учитель. Приобретают не только технические знания, но и знания человеческие.

А потом к рампе вышел И.К. Я давно его не видел, почти год был в командировке на Ровенской АЭС. Академик сильно постарел и выглядел нездоровым. Традиционный черный костюм казался ему непомерно широк. «Я хочу рассказать вам, о чем я думал, принимая награду, – сказал Кикоин. – Думал о том, что вот я, академик, руководитель большого коллектива, заместитель директора «Курчатовского института», у меня много наград, в том числе две звезды героя и много других высоких орденов, я лауреат Ленинской и Государственных премий ...»

«Зачем он это говорит, – подумал я. – Как-то не скромно». Но уже следующие несколько слов заставили меня все забыть, схватить лежавшую рядом книгу и на ее полях вкривь и вкось начать записывать то, что слышал.

«И все-таки я без всяких сомнений все это – положение, степени, звания – обменял бы на вашу молодость, на ваши 15, пусть даже 17 лет. А поменяться мне надо потому, что за долгую жизнь я не успел насладиться любимой своей физикой, не хватило мне времени, ясно вижу теперь – не хватило. Хотя не было ни одного дня в жизни, ни выходного, ни праздника, ни отпуска, когда бы я ею не занимался. Часто и сны вижу о физике. И все равно времени не хватило. Вы сами узнаете, как это бывает, когда проживете жизнь. Поэтому сейчас не упускайте времени. Все равно его не хватит, но хоть будет не так обидно. Знаете, ученый – это не название должности и не место работы. Вот он вошел в лабораторию – и стал думать о науке, и стал ученым. Это не так. Ученый – это постоянное и часто мучительное, а иногда прекрасное состояние. Вот примерно об этом я и думал, когда мне передавали эту награду».

Больше я И.К. не видел.

К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

Физика ядерного взрыва

Л.БЕЛОПУХОВ

В предыдущих «взрывных» статьях подчеркивался тот факт, что проявления взрыва очень похожи при самых разных источниках взрывного процесса. Так стоит ли специально рассматривать такой специфический источник взрыва, как ядерные превращения? Думаю, что это стоит сделать по следующим причинам.

Во-первых, навсегда останутся вписанными в историю человечества черные августовские дни 1945 года, когда больше 100000 японцев погибли от впервые примененного американцами ядерного оружия.

Во-вторых, 30 октября 1961 года в 11 часов 33 минуты по московскому времени на Новоземельском архипелаге разразился аналог библейского апокалипсического «Армагеддона» – самая страшная иллюстрация могущества современной науки и техники. За долю секунды выделилась энергия, равная той, которую за это время Земля получила от Солнца (10^{18} Дж). Политикам всего мира стало ясно, что третья мировая война – это гибель всего человечества. Тем не менее, вероятность применения ядерного оружия, увы, не нулевая. Слова «оружейный плутоний» не исчезают из политических новостей.

В-третьих, в советском атомном проекте участвовали многие выдающиеся ученые, в том числе и академик Исаак Константинович Кикоин, столетний юбилей которого отмечается в этом году. Их участие не было вынужденным советской системой. Оно определялось пониманием необходимости этой работы – ведь там, за океаном, ее начали раньше нас. И сердца многих ученых разрывались между долгом и чувством ужаса от «на волю пустим джинна из бутылки» (В.Высоцкий, «Марш физиков»).

И в-четвертых, глубинная физика высвобождения ядерной энергии – одна и та же при взрывном и мирном использовании. А человечеству в третьем тысячелетии не миновать практически полного перехода на ядерную энергетику.

Физика ядерных превращений – это красивая физика и, что существенно, не очень сложная, вполне доступная школьнику или студенту. В учебниках эти вопросы затрагиваются, но вот беда – и в школе и в вузе на них не хватает ни времени, ни внимания.

Немного истории

Уже в начале прошлого столетия стало ясно, что при радиоактивных превращениях (например, солей радия) выделяющаяся удельная энергия во много раз больше, чем в химических реакциях. А в 30-е годы были открыты особо энергичные превращения ядер, которые были названы реакциями деления тяжелых ядер, или,

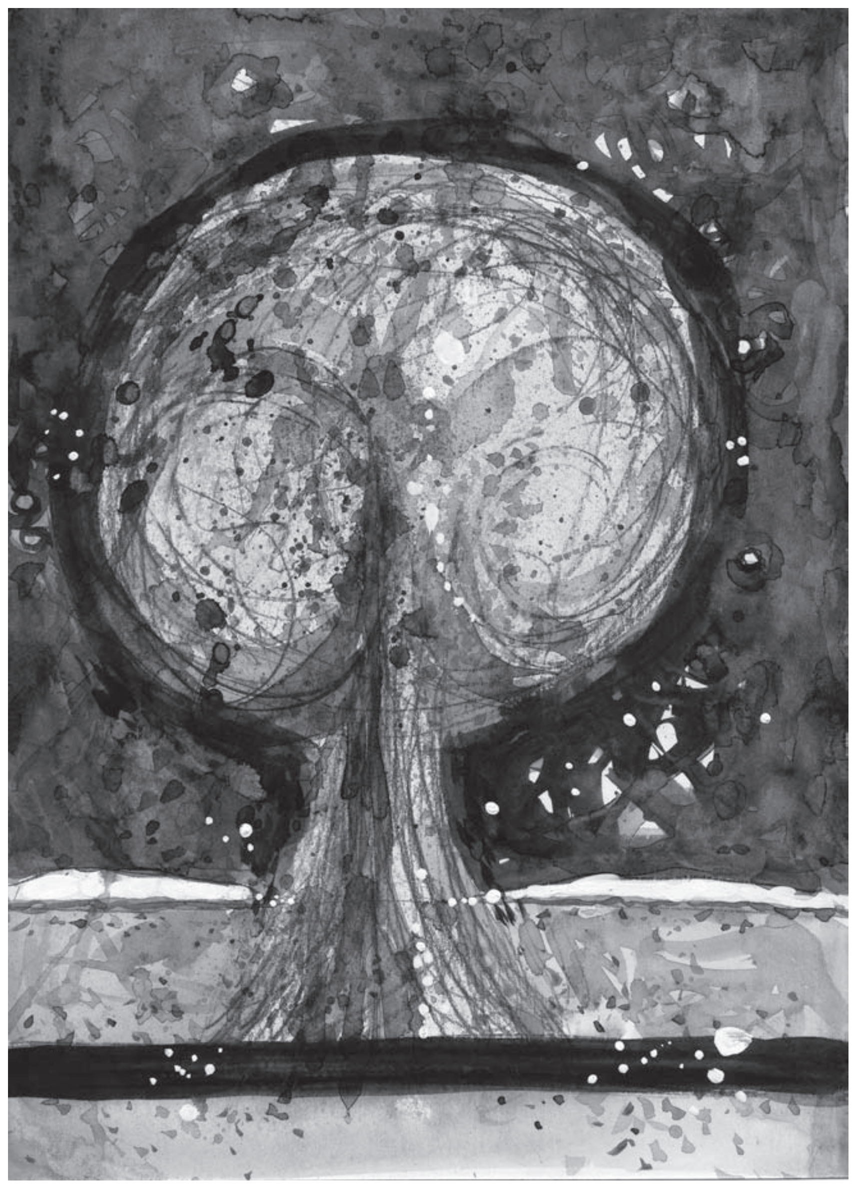


Иллюстрация В.Власова

Окончание. Начало – статьи «Взрыв» и «Ударные волны и детонация» – см. в двух предыдущих номерах журнала.

точнее, реакциями *вынужденного* деления – под действием нейтронов, тогда только что открытых.

Реакция вынужденного деления, например, урана выглядит так:

ядро урана + нейтрон = ядро элемента A +
+ ядро элемента B + несколько нейтронов.

Ведущие специалисты в области радиохимии (химии радиоактивных изотопов) О.Ган и Ф.Штрассман определили, что элементы A и B принадлежат середине периодической системы (например – лантан и барий), и тем самым доказали факт деления ядра урана на две части (Нобелевская премия О.Гана по химии 1944 года). Очевидно, что обязательное появление нескольких нейтронов в результате деления может привести к цепному (лавинному) характеру процесса, аналогично тому как это происходит в химических реакциях горения и взрыва.

В 1939 году разразилась вторая мировая война, а указанное открытие было сделано в Германии. Поэтому уже в 1941 году в США были начаты серьезные работы по созданию ядерного оружия, в которых участвовали многие европейские физики, и прежде всего Э.Ферми – самый крупный физик-ядерщик того времени.

В СССР ядерная физика тоже начала развиваться. В 1937 году в Москве состоялась вторая научная конференция по изучению атомного ядра. На открытии этой конференции вице-президент Академии наук СССР, крупнейший геолог И.М.Губкин сказал пророческие слова, что «конференция приблизит человечество и к решению проблемы практического использования внутриядерной энергии».[1] В 1940–42 годах советские ученые, анализируя статьи по ядерной тематике в зарубежных физических журналах, поняли, что в США, Англии, Германии развертываются масштабные исследования в области ядерной физики, и обратили внимание Академии наук и правительства на серьезность положения. И уже 28 сентября 1942 года (при тяжелейшем положении на Южном фронте) И.Сталин подписал распоряжение Государственного комитета обороны № 2352сс «Об организации работ по урану», где впервые прозвучали слова о «возможности создания урановой бомбы». Но только после того как в январе 1943 года смертельная угроза для страны миновала, началась атомная эпопея.

В апреле 1943 года в Москве (в гостинице «Москва») И.В.Курчатов, Ю.Б.Харитон, Г.Н.Флеров, Я.Б.Зельдович, И.К.Кикоин и А.И.Алиханов наметили первоочередность исследований, распределили обязанности. В частности, И.К.Кикоин отвечал за проблему разделения изотопов. А за два месяца до этого, 11 февраля 1943 года 40-летий И.В.Курчатов распоряжением Государственного комитета обороны был назначен научным руководителем проекта.

Вот основные этапы советского атомного проекта:

• 1946 год – создание на территории Саровского[2] монастыря (в 60 км от города Арзамас Горьковской области) сверхсекретного конструкторского бюро (КБ-11) для разработки атомного оружия, впоследствии это учреждение получило название «Арзамас-16», а сейчас это Всероссийский научно-исследовательский институт энергетической физики;

• 25.12.1946 года – запуск экспериментального ядерного реактора для получения плутония в Лаборатории №2 АН СССР (ныне – знаменитый «Курчатовский институт»);

• 29.09.1949 года – успешное испытание ядерного взрывного устройства на Семипалатинском полигоне;

• 12.08.1953 года – испытание модели термоядерной бомбы;

• 27.06.1954 года – пуск первой в мире атомной (ядерной) электростанции в городе Обнинске;

• 22.11.1955 года – успешное испытание термоядерной бомбы мегатонного класса;

1958 год – создание крупнейшей в мире установки для исследований в области регулируемых термоядерных реакций («Токамак»).

Энергия ядерной реакции деления

Особенность атомного ядра состоит в том, что в очень малой области пространства (в 100000 раз меньше пространства атома) сосредоточено небольшое количество (от 1 до 250) массивных (по сравнению с электроном) объектов – нуклонов. Согласно современной теории, каждый нуклон – это три кварка разных видов, сцепленных ядерным клеем – глюонами. Не углубляясь в тайны кварко-глюонного мира, для рассмотрения вопроса о ядерной энергии достаточно воспользоваться модельным представлением о ядре как о сумме нуклонов, часть из которых являются положительно заряженными протонами, а другая часть – незаряженными нейтронами.

Протоны и нейтроны объединены особыми короткодействующими силами притяжения, не зависящими от наличия или отсутствия электрического заряда. Но естественно, что между заряженными протонами действуют и электрические (кулоновские) силы отталкивания. Устойчивость ядер, т.е. наличие устойчивых атомов (от гелия до свинца), определяется балансом противоположно действующих электрических и ядерных сил.

У атомных ядер с числом протонов (номером элемента) больше 82 (свинец) баланс чуть-чуть нарушен. В этих ядрах «лишние» протоны имеют вероятность отделиться и оттолкнуться от ядра, захватив с собой и нейтроны. Это – механизм радиоактивного альфа-распада. У некоторых тяжелых ядер, а также у изотопов легких ядер внутри ядра происходит процесс возвращения к нормальному балансу таким образом,

[1] *Интересно, что одним из первых, кто четко представлял себе возможность гигантского опасного выделения энергии, связанного с превращениями атомных ядер, был писатель-фантаст А.Казанцев, который в романе «Пылающий остров» (печатаемом почти весь 1939 год в газете «Пионерская правда») описал возможную катастрофу. Именно поэтому на Физтехе в 1950 году состоялась встреча будущих физиков-ядерщиков с этим писателем.*

[2] *В США аналогичный центр находился в Лос-Аламосе, а в 10 км от Сарова была маленькая деревенька Аламасово. Бывают же совпадения!*

что из ядра вылетает электрон, рождающийся в результате превращения нейтрона в протон. Это – механизм бета-распада. Оба эти вида распадов сопровождаются очень коротковолновым электромагнитным излучением (гамма-частицы). Кинетическая энергия альфа-, бета- и гамма-частиц – это и есть энергия радиоактивных превращений в ядрах.

Естественная радиоактивность была впервые обнаружена (А.Беккерелем) в 1896 году, а через 40 с небольшим лет была открыта реакция деления ядра урана. Выделяющаяся в этой реакции энергия – это прежде всего кинетическая энергия продуктов реакции – «половинок» уранового ядра А и В. К ней добавляется энергия нейтронов и гамма-частиц. Происхождение кинетической энергии осколков объясняется действием электрических сил отталкивания. [3]

Расчет для энергии деления всех ядер, содержащихся в 1 кг урана, дает величину порядка 10^{14} Дж, или, в пересчете на эквивалентную по взрывной энергии массу тротила, – 5 килотонн. Эта величина является верхним пределом выделяющейся энергии. Но, во-первых, в бомбе не весь уран успевает прореагировать. В зависимости от конструкции и назначения бомбы, КПД колеблется в пределах 10–30%. Во-вторых, в ядрах с меньшим числом нуклонов роль ядерных сил притяжения значительнее, чем для тяжелых ядер. Это и означает, что ядерные силы при делении противодействуют электрическим силам, ослабляют их действие.

Ядерная бомба и ядерная электростанция

Долгое время это оружие называлось *атомной* бомбой, что не имеет никакого физического смысла. В результате атомных (молекулярных) превращений выделяется энергия при взрыве обыкновенной, а не ядерной взрывчатки.

Для создания *ядерной* бомбы кроме решения теоретически принципиальных вопросов, частично рассмотренных выше, нужно было осуществить многие практические задачи. Перечислю их вкратце:

– обработка природного урана с целью извлечения из него изотопа урана-235 высокой степени чистоты (0,9999);

– получение плутония-239 из урана-238 при мощном воздействии нейтронов;

– создание конструкции, в которой соединение отдельных блоков, имеющих размер меньше критического, в единый блок происходило бы достаточно эффективно;

– создание испытательного полигона совершенно нового типа;

– создание средств доставки бомбы к точке взрыва.

Почему для ядерной бомбы нужны только указанные два типа ядер – уран-235 и плутоний-239? Дело в том, что реакция деления этих ядер происходит, когда инициирующий реакцию нейтрон имеет любую энергию (и даже чем она меньше, тем больше вероятность реакции). А другие ядра, например уран-238, делятся только в том случае, если энергия нейтрона строго определена.

Отделение урана-235 от урана-238 – очень непростая задача. Ведь химические свойства этих ядер одинаковы. Поэтому пригодны лишь физико-механические процессы, использующие маленькую разницу в массах этих изотопов. Например, применяются методы, использующие разную скорость диффузии, различное отклонение ионов в магнитном поле, но наиболее выгодным оказался метод центрифугирования. Всеми этими работами долгие и самые ответственные годы руководил И.К.Кикоин, один из самых блестящих физиков-экспериментаторов.

Отмечу, что каждую операцию обогащения смеси нужным изотопом необходимо повторять не два или три раза, а десятки и даже сотни раз. Заводы по разделению изотопов представляют собой километровые ряды одинаковых аппаратов, которые дают все более и более чистую продукцию. В аппаратах циркулирует газообразный гексафторид урана, который еще нужно получить из урановой руды и очистить от всевозможных посторонних примесей – а это тоже километровые ряды одинаковых аппаратов.

Самым эффективным, с экономической точки зрения, является метод разделения изотопов с помощью центрифуг. В 1970–80 годы в СССР были созданы уникальные центрифуги, до сих пор не имеющие в мире аналогов. Достаточно сказать, что скорость вращения ураносодержащего сосуда достигает 1000 оборотов в секунду. Представьте, какими необычайными механическими свойствами должны обладать эти сосуды и какими должны быть подшипники!

Получение плутония несколько проще методов разделения изотопов урана. Плутоний образуется при поглощении ядром урана-238 нейтрона и последующим бета-превращением урана сначала в нептуний, а потом уже и в плутоний. Это – другой химический элемент, и его выделение из смеси с ураном может быть произведено химическими путями. Но единственный способ создания мощных потоков нейтронов – это урановый ядерный реактор, в котором идет медленный невзрывной процесс деления, поскольку в реакторе в основном содержится обычный уран-238. Небольшая доля изотопа урана-235 обеспечивает процесс деления и поток нейтронов для превращения урана-238 в плутоний.

Вы заметили, конечно, что это – описание ядерной электростанции. Ведь энергия, выделяющаяся в процессе деления в виде кинетической энергии продуктов деления, нагревает всю окружающую среду. Отбор энергии производится теплоносителем (водой или жидкими металлами), который за пределами активной зоны реактора отдает ее в конечном счете генераторам электрического тока.

В конструкции ядерного реактора главное – обеспечение надежности в стационарности процесса. Автоматика вполне в состоянии справиться с этой задачей. В печально известной Чернобыльской катастрофе 1986 года именно отключение автоматики привело к срыву

[3] *Исходя из формулы потенциальной энергии электрического взаимодействия осколков А и В, попробуйте оценить их суммарную кинетическую энергию вдали от точки разлета, считая для простоты осколки одинаковыми, а начальное расстояние между центрами осколков равным* 10^{-14} *м.*

стационарности, быстрому разогреву, парообразованию и тепловому взрыву с выбросом содержимого активной зоны реактора с сильно радиоактивными продуктами реакции деления.

В конструкции ядерной бомбы задачи – противоположные. Необходимо обеспечить как можно более быстрое и полное превращение урана или плутония в продукты деления. Как известно, в небольшом объеме изотопа реакция деления не становится лавинной, потому что большинство нейтронов успевают вылететь за пределы этого объема, не сумев произвести очередное деление. Только начиная с некоторого «критического» размера может осуществиться цепная реакция (часто говорят не о критическом размере, а о критической массе, что, впрочем, одно и то же с физической точки зрения). Поэтому в бомбе должны быть несколько отдельных, докритических блоков ядерного «горючего», которые в некоторый момент нужно соединить. От скорости и синхронности их соединения зависит полнота использования ядерного вещества и, следовательно, энергия взрыва.

Может возникнуть вопрос: а почему в природе, где размеры блоков породы, содержащей уран, достигают больших величин, реакция деления не развивается? Дело в том, что изотопа урана-235 в породе очень мало, а самопроизвольная реакция деления урана (есть и такой процесс) происходит очень редко. И все рождающиеся нейтроны поглощаются окружающими ядрами изотопа урана-238, рождая различные радиоактивные изотопы и создавая общий повышенный фон излучения в окрестностях залежей урана. В конструкциях же ядерных бомб, кроме устройств по синхронному соединению блоков горючего, используется многое другое, в частности – отражатели нейтронов и специальные источники нейтронного излучения.

Непростым делом оказалось и создание специального испытательного полигона. Достаточно сказать, что полигон – это многокилометровые линии с приборными комплексами самых различных назначений (измерения параметров ударной волны, потоков радиоактивных частиц и излучений, теплового и светового излучений), инженерные сооружения военного и гражданского назначения, военная техника, подопытные животные и т.д. Полигон – это институты, в которых производится обработка результатов измерений и анализ возникающих научных проблем. Это, наконец, огромное военное хозяйство, обслуживаемое несколькими дивизиями.

Семипалатинский полигон был создан в рекордно короткие сроки в 1948–49 годы по проекту Г.Л.Ширмана под руководством М.А.Садовского, будущего академика, директора Института физики Земли АН СССР.

Термоядерное оружие

Термоядерная реакция противоположна реакции деления тяжелых ядер по роли взаимодействия между частицами. Это – реакция синтеза, т.е. соединения изотопов водорода в более тяжелое ядро гелия. При этом электрические силы отталкивания положительно заряженных ядер мешают процессу синтеза, а кинетическая энергия продуктов реакции получается как результат «срабатывания» ядерных сил притяжения. Но эти силы включаются только тогда, когда частицы подойдут на расстояние порядка 10^{-15} м. А чтобы преодолеть электрическое отталкивание, соединяющимся ядрам нужно иметь скорость порядка десятков тысяч километров в секунду, что соответствует температуре в десятки и сотни миллионов градусов. Поэтому реакцию синтеза и называют *термоядерной* реакцией.

Придать такую скорость частицам можно разными способами. Например, можно сфокусировать в одном месте сотни потоков быстрых электронов, чтобы они передали свою кинетическую энергию ядрам. Можно воздействовать мощным лазерным излучением. Один из перспективных путей – это разгон ядер мощным электрическим полем (искровой разряд, молния).

Но все эти пути не годятся для ядерного оружия, которое должно быть достаточно портативным. Единственный способ – это помещение ядерной бомбы внутрь контейнера, содержащего легкие элементы, скажем изотопы водорода дейтерий и тритий (или дейтерид лития). Необходимые для начала термоядерного процесса синтеза кинетические энергии (или температуры) дает огненный шар ядерного взрыва. Начавшийся процесс синтеза будет сам себя поддерживать, поскольку продукты реакции синтеза будут обладать большей кинетической энергией, чем исходные ядра.

На деле все, однако, оказалось не таким простым. Для мощных термоядерных бомб пришлось придумать схемы добавочного «производства» нейтронов от реакций деления урановых изотопов (кроме первичной «запальной» бомбы) и обжатия водородного «сырья» излучением вторичного ядерного уранового взрыва. Этот принцип получил название радиационной имплозии. При этом полностью использовался запас ядерного горючего.

Успешные испытания новой конструкции в 1955 году на Семипалатинском полигоне и в 1961 году на Новоземельском полигоне открыли эру гонки вооружений и одновременно поставили вопрос о прекращении этой гонки. Разрешение этого противоречия, возможно, стало одной из причин той ломки нашего государства, которая произошла в 1991 году. В 1996 году было, наконец, достигнуто международное соглашение о прекращении любых испытаний ядерного оружия, а также и применения ядерных взрывов в мирных целях.

Формат этой статьи не позволяет подробно рассмотреть вопрос о стационарном контролируемом термоядерном процессе синтеза легких ядер, о термоядерных электростанциях. Пятьдесят лет назад оптимистам казалось, что эта задача будет решена лет за 10–20. Современные оптимисты считают, что она будет решена в XXI веке. А современные пессимисты полагают, что законы природы не разрешат это сделать никогда.

Но на что тогда останется надеяться человечеству, когда закончатся уголь, нефть и газ и будут выработаны все урановые месторождения? А пессимисты ожидают, что это произойдет уже в текущем тысячелетии.

Две знаменитые формулы

В.ВАВИЛОВ, А.УСТИНОВ

Напомним, что целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^2$ называется множество точек декартовой плоскости с целыми координатами. Бывает удобным представлять себе целочисленную решетку как бесконечный лист клетчатой бумаги. Многоугольник считается расположенным на $\mathbb{Z}^2$, если все его вершины являются точками (узлами) этой решетки.

В статье речь пойдет о формуле Пика для вычисления площадей многоугольников, расположенных на целочисленной решетке, и об одной комбинаторной формуле Эйлера. Отдельное внимание будет уделено связи между ними.

Примитивные треугольники

Прежде чем изучать произвольные многоугольники на решетке, рассмотрим простейший (и важнейший!) частный случай. Предположим, что многоугольник является треугольником и кроме своих вершин не имеет внутри и на сторонах других узлов решетки. Такие треугольники называются *примитивными* (см. примеры на рисунке 1).

Рис. 1

Их свойства мы сначала и изучим.

Теорема 1. *Треугольник является примитивным тогда и только тогда, когда он имеет площадь $1/2$.*

Доказательство. Пусть $T = ABC$ – примитивный треугольник. Рассмотрим минимальный прямоугольник с вершинами в узлах решетки $\mathbb{Z}^2$ и сторонами, параллельными осям координат, содержащий треугольник ABC. Из всех возможных случаев взаимного расположения треугольника и прямоугольника (рис.2) наиболее общей является ситуация, показанная на рисунке 2,*г*.

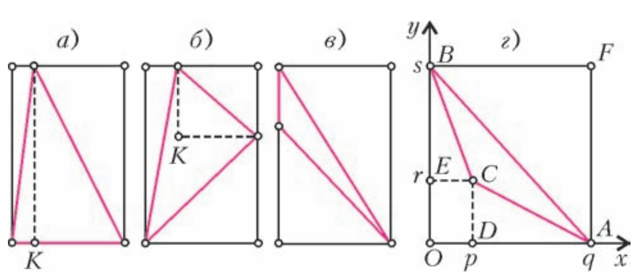


Рис. 2

Действительно, в случаях *а*) и *б*) треугольник T не является примитивным, так как точка K имеет целые координаты; случай *г*) включает в себя случай *в*), если предполагать, что вершина C может располагаться на OB или OA (в частности, может совпадать с O).

Будем считать, что точка O на рисунке 2,*г* является началом координат, $D = (p;\ 0)$, $A = (q;\ 0)$, $E = (0;\ r)$, $B = (0;\ s)$. Через $I(P)$ будем обозначать число узлов решетки, расположенных внутри многоугольника P, но не на его сторонах. Тогда

$$I(OAFB) = (q-1)(s-1).$$

Так как внутри отрезка AB не содержится узлов решетки, то

$$I(OAB) = I(OAFB)/2 = (q-1)(s-1)/2.$$

Аналогично,

$$I(ACD) = (q-p-1)(r-1)/2,$$

$$I(CBE) = (s-r-1)(p-1)/2.$$

Треугольник T не содержит внутри себя узлов решетки. Значит,

$$I(OAB) - I(ACD) - I(CBE) = pr,$$

где pr – число узлов решетки, расположенных внутри прямоугольника $ODCE$, но включая число узлов на его сторонах CD и CE (без точек D и E). Отсюда следует, что

$$(q-1)(s-1) - (q-p-1)(r-1) - (s-r-1)(p-1) = 2pr,$$

и, тем самым,

$$qs - ps - qr = 1.$$

Используя это равенство, получаем – здесь и далее $[F]$ обозначает площадь фигуры F –

$$[ABC] = [OAB] - [ACD] - [CBE] - [ODCE] =$$

$$= sq/2 - (p-q)r/2 - (s-r)p/2 - pr =$$

$$= (qs - ps - qr)/2 = 1/2,$$

что и дает прямое утверждение теоремы.

Докажем обратное утверждение, предположив противное: существует треугольник площади $1/2$, который не является примитивным.

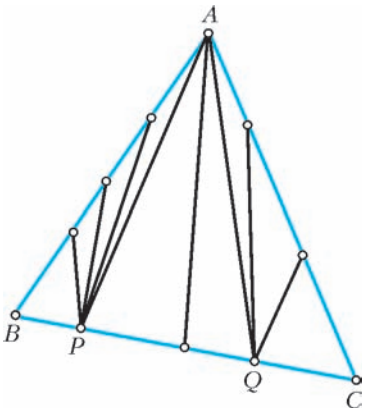


Рис. 3

Сначала покажем, что любой треугольник можно разбить на примитивные. Пусть внутри треугольника $T = ABC$ нет точек решетки, но имеются узлы решетки на одной из его сторон, скажем BC. Тогда соединим вершину A со всеми узлами решетки на стороне BC (рис.3). Все полученные треугольники, кроме ABP и AQC, окажутся примитивными, а у этих двух крайних треугольников имеется по две стороны, которые не содержат узлов решетки. Соединив точки P и Q с узлами решетки, находящимися на сторонах AB и AC соответственно, мы разобьем треугольники ABP и AQC на примитивные треугольники.

Пусть у данного треугольника имеются узлы решетки внутри. Выбрав произвольный из них, соединим его отрезками с вершинами исходного треугольника ABC (рис.4). Проведенные отрезки разобьют ABC на три треугольника, которые внутри себя содержат меньше внутренних узлов решетки, чем их имел треугольник ABC. Так как мы имеем дело с конечным числом узлов решетки, то, продолжая этот процесс, в какой-то момент мы разобьем треугольник ABC на треугольники, не содержащие внутри себя узлов решетки. Теперь разбиение на примитивные треугольники можно закончить, используя описанную ранее процедуру.

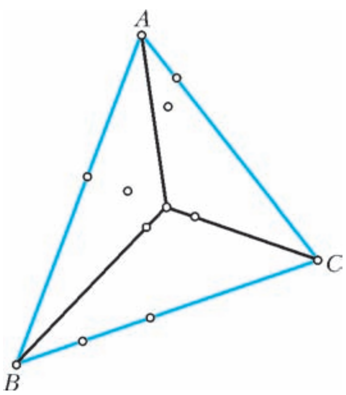


Рис. 4

Вернемся к доказательству достаточности. Разобьем треугольник T на примитивные. Согласно сделанному предположению, их будет не менее двух. Из прямого утверждения теоремы вытекает, что каждый из них имеет площадь $1/2$, а это невозможно, так как $[T] = 1/2$.

Упражнение 1. Докажите, что для любого сколь угодно большого числа M на решетке $\mathbb{Z}^2$ существует примитивный треугольник, все стороны которого больше этого числа M.

Формула Пика

Далее, если не оговорено противное, рассматриваются *простые* многоугольники, т.е. такие, которые ограничены замкнутой несамопересекающейся ломаной. На рисунке 5 показаны примеры многоугольников, которые простыми не являются.

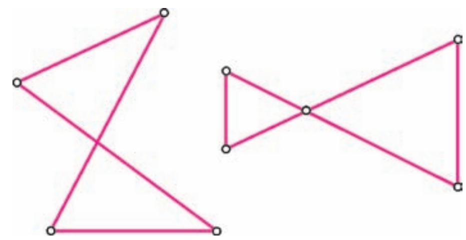


Рис. 5

Теорема 2 (Г.Пик). *Для любого простого многоугольника P на целочисленной решетке имеет место формула*

$$[P] = N_i + N_e/2 - 1,$$

где N_i – число узлов решетки, расположенных строго внутри многоугольника, и N_e – число узлов решетки, расположенных на его границе (включая вершины).

Так, например, на рисунке 6 мы имеем: $N_i = 9$, $N_e = 11$, и, тем самым, по формуле Пика

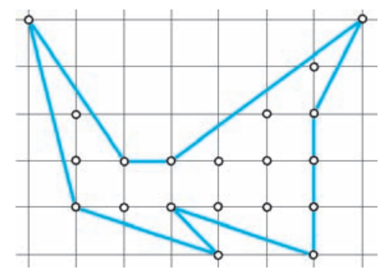


Рис. 6

$$[P] = 9 + 11/2 - 1 = 27/2.$$

Доказательство. Приступая к доказательству теоремы, во-первых, отметим, что любой простой многоугольник имеет по крайней мере одну диагональ, которая целиком расположена внутри многоугольника.

Упражнение 2. Докажите это утверждение.

Отсюда и из принципа математической индукции следует, что любой простой k-угольник можно разбить на $(k-2)$ треугольника, все вершины которых являются вершинами исходного многоугольника и, в частности, узлами решетки. Поэтому *сумма всех внутренних углов простого k-угольника равна* $(k-2)\pi$.

Во-вторых, каждый из полученных треугольников разобьем на примитивные так, как это делалось при доказательстве теоремы 1. Поскольку площадь каждого примитивного треугольника равна $1/2$, то число примитивных треугольников в разбиении равно $N = 2[P]$ и поэтому *не зависит от способа разбиения.*

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось проверить равенство

$$N = 2N_i + N_e - 2.$$

Далее будем предполагать, что P является k-угольником. Его вершины также будут и вершинами некоторых примитивных треугольников разбиения (рис.7,*а*). Сумма углов треугольников при таких вершинах равна сумме внутренних углов многоугольника P и, тем самым, равна $180°(k-2)$.

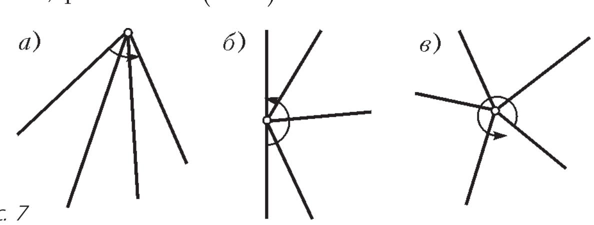


Рис. 7

Узел решетки, который находится на границе P, но не является его вершиной, также участвует в разбиении и служит вершиной некоторых примитивных треугольников (рис.7,*б*), а сумма всех углов при всех таких вершинах-узлах равна $180°(N_e - k)$.

Каждая из N_i точек решетки (находящихся внутри P) участвует в разбиении на примитивные треугольники и является их вершинами. Сумма углов, сходящихся в такой точке, равна $360°$ (рис.7,*в*). Поэтому сумма всех углов всех примитивных треугольников с вершинами во внутренних узлах равна $360°N_i$.

С другой стороны, сумма углов всех примитивных треугольников равна $180°N$, и поэтому

$$180°N = 360°N_i + 180°(N_e - k) + 180°(k - 2).$$

Следовательно, $N = 2N_i + N_e - 2$, и теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Пусть плоскость разбита на равные параллелограммы двумя семействами параллельных прямых (это разбиение можно представлять себе как «косоугольную клетчатую бумагу»). Тогда вершины параллелограммов образуют множество, которое называется *точечной решеткой* Λ. Целочисленная решетка – важный частный случай, когда параллелограммы являются квадратами.

Для многоугольника P на произвольной решетке Λ также справедлива формула Пика

$$[P] = (N_i + N_e/2 - 1)\Delta(\Lambda),$$

где $\Delta(\Lambda)$ – площадь каждого из параллелограммов. Доказательство проводится точно по той же схеме.

Логический анализ доказательства теоремы 2

Сформулируем еще раз три доказанных нами утверждения.

$1°$. *Для любого простого многоугольника P на решетке $\mathbb{Z}^2$ имеет место формула Пика*

$$[P] = N_i + N_e/2 - 1.$$

$2°$. *Площадь любого примитивного треугольника на решетке $\mathbb{Z}^2$ равна $1/2$.*

$3°$. *В любом разбиении простого многоугольника на примитивные треугольники для их числа N справедлива формула*

$$N = 2N_i + N_e - 2.$$

Проследим логические связи между этими утверждениями и сравним их «силу».

Если бы с самого начала была доказана формула Пика, то утверждение $2°$ было бы ее тривиальным следствием, а утверждение $3°$ следовало бы из $1°$ и $2°$ вместе взятых (рис.8,*а*). При таком подходе (а он возможен – см. упражнение 3) для проверки всех трех утверждений нам понадобилось бы доказать формулу Пика независимо от $2°$ и $3°$.

Мы избрали другой путь: сначала доказали утверждение $2°$ независимо, затем получили $3°$, а формула Пика оказалась следствием их обоих (рис.8,*б*).

Интересно проследить и за другими возможными

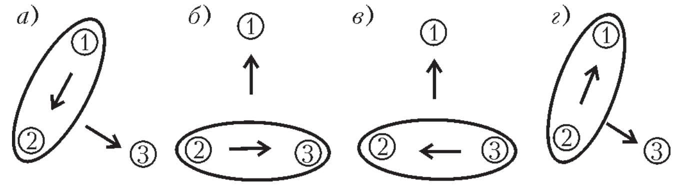


Рис. 8

логическими подходами к доказательству этих трех утверждений, показанными на рисунке 8,*в* и *г*.

Покажем, как из $3°$ следует $2°$. Заметим сначала, что площадь любого треугольника на решетке $\mathbb{Z}^2$ (а тем самым, и любого простого многоугольника на ней) выражается числом вида $n/2$. Для этого частично повторим рассуждения, использованные нами при доказательстве теоремы 1. Опишем вокруг треугольника минимальный прямоугольник со сторонами вдоль линий решетки. Как и раньше, возможны несколько случаев их взаимного расположения, показанных на рисунке 2. В каждом из них треугольник дополняется до прямоугольника фигурами, имеющими целую или полуцелую площадь. Таким образом, площадь любого треугольника на целочисленной решетке должна быть полуцелым числом, и, следовательно, эта площадь не меньше $1/2$.

Пусть теперь T – примитивный треугольник и P – минимальный прямоугольник, описанный около него. Разобьем все многоугольники, дополняющие T до P, на примитивные треугольники. В итоге получим разбиение P на примитивные треугольники $\{T_k\}$, один из которых совпадает с T.

Разобьем P на примитивные треугольники другим способом, проводя диагонали в каждой из pq составляющих его квадратных ячеек решетки.

Число примитивных треугольников во втором разбиении (а по условию $3°$ – и в первом) равно $2pq$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{2pq}[T_k] = pq.$$

Каждое слагаемое в сумме, по доказанному, не меньше $1/2$. Поэтому равенство возможно лишь тогда, когда все слагаемые, в том числе и $[T]$, равны $1/2$.

Докажем импликацию $2° \Rightarrow 1°$. Для этого рассмотрим функцию

$$F(P) = N_i + N_e/2 - 1,$$

определенную на всех простых многоугольниках, расположенных на решетке $\mathbb{Z}^2$. Если разбить многоугольник P при помощи какой-либо ломаной с вершинами в узлах решетки на два других многоугольника P_1 и P_2 (в этом случае мы пишем $P = P_1 + P_2$; рис.9), то, как легко проверить, имеет место следующее аддитивное свойство:

$$F(P_1 + P_2) = F(P_1) + F(P_2).$$

Площадь обладает тем же свойством:

$$[P_1 + P_2] = [P_1] + [P_2].$$

Поэтому, если формула

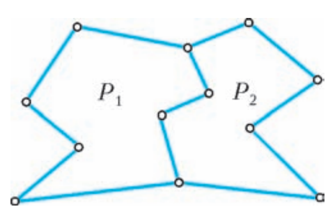


Рис. 9

Пика верна для многоугольников P_1 и P_2, то она верна и для многоугольника $P = P_1 + P_2$. Но так как любой простой многоугольник можно разбить на примитивные треугольники, а формула Пика для них по нашему предположению верна, то она верна и для произвольного многоугольника.

Подводя итоги проведенного логического анализа, заключаем, что самым «сильным» является утверждение $1°$. Но нами установлено, что каждое из трех утверждений может быть получено как следствие любого другого. И в этом смысле они эквивалентны!

Упражнение 3. Используя аддитивность функции $F(P)$ и рассуждения из доказательства теоремы 1 об описанном прямоугольнике, найдите независимое (от $2°$ и $3°$) доказательство формулы Пика.

Формула Эйлера

Связь утверждений $1°$ и $3°$, отмеченная в предыдущем разделе, показывает, что формула Пика имеет также и комбинаторный характер.

Более общим, чем разбиение многоугольника на треугольники, является понятие карты. *Правильная многоугольная карта* – это такое разбиение простого многоугольника на другие простые многоугольники, когда любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют только одну общую вершину, либо вообще не имеют общих точек.

Карту можно рассматривать как частный случай *плоского односвязного графа*. При таком подходе многоугольники разбиения являются гранями графа, а стороны многоугольников – *ребрами*.

Для плоских графов (а в частности, и многоугольных карт) имеет место знаменитая *формула Эйлера*, которая утверждает, что

$$V + F - E = 1,$$

где V обозначает число вершин графа, F – число граней, E – число ребер (рис.10).

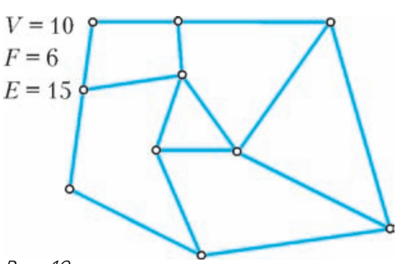


Рис. 10

Слово «карта» подчеркивает, что формула Эйлера имеет место и для «криволинейных разбиений» (рис.11), когда важна не форма линий, а только способ соединения точек с выполнением требования «правильности» (например, из разбиения пятиугольника на треугольники и четырехугольники, показанного на рисунке 10, заменой отрезков кривыми линиями получается правильная криволинейная карта).

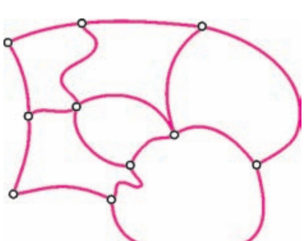


Рис. 11

В случае когда все внутренние части правильной многоугольной карты являются треугольниками, говорят о *триангуляции* многоугольника.

Ясно, что любой простой многоугольник P на плоскости может быть триангулирован бесконечным числом способов. Однако для числа N треугольников в триангуляции всегда (а не только на $\mathbb{Z}^2$) будет справедлива та же формула $N = 2N_i + N_e - 2$, которая ранее была установлена только для многоугольников на решетке. Отметим, что здесь смысл чисел N_i и N_e уже несколько иной: N_i – число вершин графа, находящихся внутри P, а N_e – на границе P. Докажите эту формулу самостоятельно!

Другое свойство триангуляций связано с общим числом E всех сторон треугольников, входящих в триангуляцию:

$$E = 3N_i + 2N_e - 3.$$

Действительно, так как имеется N_e вершин на границе P, то существует N_e треугольников, одна сторона которых находится на границе P и $E - N_e$ сторон которых находятся строго внутри P, причем каждая такая «внутренняя сторона» принадлежит ровно двум треугольникам. Следовательно, $3N$ сторон у N треугольников включают каждую из $E - N_e$ сторон дважды и каждую из N_e сторон по одному разу. Таким образом,

$$3N = 2(E - N_e) + N_e = 2E - N_e.$$

Следовательно,

$$E = \frac{3N + N_e}{2} = \frac{3(2N_i + N_e - 2) + N_e}{2} = 3N_i + 2N_e - 3,$$

что и утверждалось.

Теорема 3 (Л.Эйлер). *Для любой правильной многоугольной карты имеет место равенство*

$$V + F - E = 1.$$

Доказательство. Пусть имеется правильная многоугольная (криволинейная) карта. Выберем внутри каждого многоугольника разбиения одну точку. Соединим ее с вершинами многоугольника линиями (не обязательно отрезками) так, чтобы они находились строго внутри этого многоугольника (см. пример на рисунке 12).

Теперь заметим, что формула $E = 3N_i + 2N_e - 3$ справедлива и для вновь полученной «криволинейной триангуляции» R исходной карты. Для триангуляции R, очевидно, имеем

$$N_i + N_e = V + F.$$

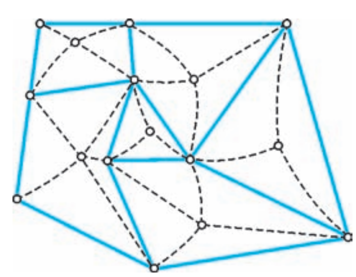


Рис. 12

Каждый треугольник в R одной своей стороной имеет ребро исходного графа, а две другие стороны – кривые, нами проведенные. Каждое новое ребро является общим для двух треугольников в R. Таким образом, удвоенное число новых ребер графа равно удвоенному числу треугольников. Поэтому для числа E' всех ребер в R имеем равенство

$$E' = E + N,$$

где N – число треугольников в R. Используя теперь еще и полученное выше равенство $3N = 2E' - N_e$, находим

$$V + F - E = (N_i + N_e) - (E' - N) =$$
$$= N_i + N_e - (E' + N_e) =$$
$$= N_i + N_e - (3N_i + 3N_e - 3)/3 = 1,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

4. Проведите рассуждения в обратную сторону, т.е. из формулы Эйлера $V + F - E = 1$ выведите равенство $N = 2N_i + N_e - 2$.

5. Докажите формулу Эйлера независимо, т.е. не пользуясь равенством $N = 2N_i + N_e - 2$.

Проведенные исследования позволяют сформулировать такой результат:

Формулы Эйлера и Пика, как и утверждения $1^\circ - 3^\circ$, могут быть выведены друг из друга и также могут пониматься как эквивалентные формулы.

Продумайте соответствующие цепочки утверждений самостоятельно.

Формулы Пика и Эйлера могут быть обобщены на правильные карты с «лакунами» (отверстиями), которые сами являются простыми многоугольниками (рис.13,*а*).

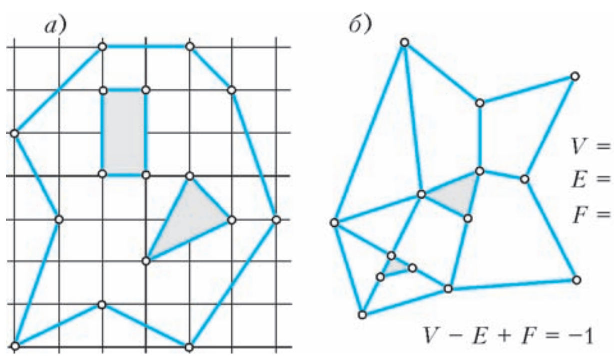


Рис. 13

Для таких многоугольников справедливы следующие результаты:

Теорема 4. *Для любого простого многоугольника P с n лакунами на решетке* $\mathbb{Z}^2$

$$[P] = N_i + N_e/2 - 1 + n,$$

где N_i – число узлов решетки, расположенных внутри P, но не на границе лакун и не внутри лакун, а N_e – число узлов решетки, которые принадлежат границе P и границам всех лакун.

Теорема 5. *Для любой простой многоугольной карты с n лакунами (в прежних обозначениях)*

$$V - E + F = 1 - n.$$

Пример, иллюстрирующий эту теорему приведен на рисунке 13,*б*.

Доказательства теорем 4 и 5 оставляем читателю в качестве полезных упражнений.

Упражнения

6 (Ю.И.Ионин). Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке (рис.14). В каких тройках точек

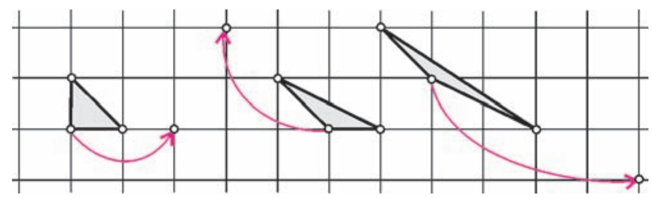


Рис. 14

(с точностью до параллельного переноса) могут через несколько прыжков оказаться кузнечики?

7. Вершины треугольника являются узлами решетки $\mathbb{Z}^2$ и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что если такой треугольник внутри себя содержит ровно один узел решетки, то этот узел является центром пересечения медиан данного треугольника.

8. Пусть вершины выпуклого n-угольника находятся в узлах решетки $\mathbb{Z}^2$, а внутри и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что $n \le 4$.

9. Докажите, что для любых двух узлов A и B решетки $\mathbb{Z}^2$, на отрезке между которыми нет других узлов, найдется узел C такой, что треугольник ABC примитивный. Чему равно расстояние от точки C до прямой AB, если точки A и B находятся на расстоянии d?

10 (Н.Б.Васильев). Докажите, что если решетку $\mathbb{Z}^2$ разбить на четыре непересекающиеся подрешетки с клетками 2×2, то вершины любого примитивного треугольника решетки $\mathbb{Z}^2$ обязательно попадут в узлы трех разных указанных подрешеток.

11. На решетке $\mathbb{Z}^2$ отмечены $n \ge 3$ узлов так, что любые три из них образуют треугольник, медианы которого не пересекаются в узле этой решетки. Найдите наибольшее число n, при котором это возможно.

12 (Н.Б.Васильев). Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений. Какую площадь может ограничивать эта ломаная?

13. При любом расположении на плоскости квадрата размерами $n \times n$ он покроет не более $(n+1)^2$ узлов целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$. Докажите это.

14. В каждом из случаев, представленных на рисунке 15, вычислите площадь указанного параллелограмма, если стороны параллелограмма $ABCD$ разделены на n и m равных частей, а его площадь равна 1.

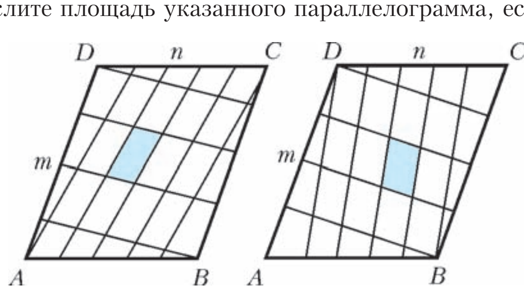


Рис. 15

(Продолжение см. на с. 22)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2008» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2081» или «Ф2088». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2081–М2083 предлагались на XXIX Турнире городов, задача М2085 предлагалась на XLVIII Международной математической олимпиаде.

Задачи М2081–М2085, Ф2088–Ф2092

М2081. На доске записаны три положительных числа: x, y и 1. Разрешается дописывать на доску сумму или разность каких-нибудь двух уже записанных чисел или записать число, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Всегда ли можно получить на доске число: а) x^2; б) xy?

Г.Гальперин

М2082. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Пусть K, L, M, N – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников PKL, PLM, PMN, PNK равны.

А.Заславский

М2083. Дана клетчатая полоса $1\times N$. Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй – нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Б.Френкин

М2084*. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих равенству

$$\frac{x^7-1}{x-1}=y^5-1.$$

А.Ефимов

М2085*. Среди участников математического соревнования некоторые дружат между собой; если A дружит с B, то и B дружит с A. Назовем группу участников *кликой*, если каждые двое из них дружат. Назовем количество человек в клике ее *размером*. Известно, что наибольший размер клики, состоящей из участников соревнования, является четным числом. Докажите, что всех участников можно рассадить в две комнаты так, чтобы наибольший размер клики в одной комнате был равен наибольшему размеру клики в другой комнате.

В.Астахов

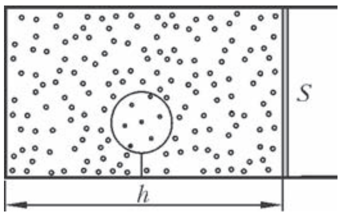
Ф2088. Автомобиль «Жигули» самой первой модели едет по огромной горизонтальной асфальтовой площади, описывая круг радиусом 200 м. Его скорость составляет при этом 20 м/с. При каком значении коэффициента трения между асфальтом и шинами автомобиля такое движение возможно? Представим себе, что коэффициент трения ровно вдвое больше этого минимального значения. За какое время автомобиль сможет увеличить свою скорость до 20,5 м/с, не прекращая движения по кругу? Центр тяжести автомобиля находится на его оси симметрии на равных расстояниях от передней и задней осей.

А.Повторов

Ф2089. На гладком горизонтальном столе находится брусок кубической формы массой 2 кг. На его верхней поверхности лежит второй брусок, его масса 1 кг. Коэффициент трения между поверхностями брусков составляет 0,7. Большой брусок тянут влево горизонтальной силой 6 Н, малый – вправо горизонтальной силой 3 Н (эти две силы направлены в противоположные стороны!). Найдите ускорения брусков.

З.Рафаилов

Ф2090. Горизонтальный цилиндрический сосуд с теплопроводящими стенками, заполненный аргоном плотностью $\rho=1{,}7$ кг/м^3, закрыт подвижным поршнем и



находится в комнате (см. рисунок). Площадь поршня $S = 400$ см^2, расстояние от края цилиндра до поршня $h = 50$ см. В сосуде ко дну на нити прикреплен шар объемом $V_ш = 1000$ см^3, сделанный из тонкого нерастяжимого и теплопроводящего материала и заполненный гелием. Масса шара с гелием $m = 1{,}2$ г. После того как протопили печь и воздух в комнате прогрелся, поршень переместился на расстояние $\Delta h = 3$ см. Найдите изменение силы натяжения нити, удерживающей шар.

Е.Простомолотова

Ф2091. Три одинаковые батарейки напряжением 1,5 В каждая вначале не соединены друг с другом. Затем между каждым выводом батарейки и каждым из пяти оставшихся выводов подключают резистор сопротивлением 1000 Ом. Сколько всего получится резисторов? Какой ток при этом будет течь через каждую из батареек?

А.Простов

Ф2092. Школьник исследует резонанс в последовательном колебательном контуре, используя генератор звуковой частоты и высокоомный вольтметр переменного напряжения. Конденсатор имеет емкость 0,5 мкФ, индуктивность катушки равна 0,1 Гн. Сопротивление провода, которым намотана катушка, составляет 50 Ом. Вольтметр подключают параллельно конденсатору и изменяют частоту генератора. На какой частоте показания вольтметра будут максимальными? На какой частоте вольтметр покажет максимум, если подключить его к выводам катушки?

А.Зильберман

Решения задач М2056–М2065, Ф2073–Ф2077

М2056. *В натуральном числе A переставили цифры, получив число B. Известно, что* $A - B = \underbrace{11\ldots1}_{N\text{ единиц}}$. *Найдите наименьшее возможное значение N.*

Ответ: 9.

Как известно, любое число имеет тот же остаток от деления на 9, что и его сумма цифр. Поэтому числа, получаемые друг из друга перестановкой цифр, имеют одинаковый остаток от деления на 9, т.е. их разность делится на 9. Поэтому и сумма цифр разности, равная N, должна делиться на 9, откуда $N \geq 9$.

Значение $N = 9$ получается, например, так:

$$9012345678 - 8901234567 = 111111111.$$

Н.Агаханов

М2057. *25 мальчиков и несколько девочек собрались на вечеринке и обнаружили забавную закономерность. Если выбрать любую группу не меньше чем из 10 мальчиков, а потом добавить к ним всех девочек, знакомых хотя бы с одним из этих мальчиков, то в получившейся группе число мальчиков окажется на 1 меньше, чем число девочек. Докажите, что некоторая девочка знакома не менее чем с 16 мальчиками.*

По условию имеется ровно 26 девочек, знакомых хотя бы с одним мальчиком из 25. Выберем произвольно мальчика M. Для оставшихся 24 мальчиков ровно 25 девочек знакомы хотя бы с одним из них. Тогда девочка D, не входящая в эти 25, знакома только с одним мальчиком M. Обозначим мальчиков $M_1, \ldots, M_{25}$; обозначим девочку, знакомую только с M_i, через D_i. Рассмотрим оставшуюся девочку (отличную от $D_1, \ldots, D_{25}$). Если она знакома менее чем с 16 мальчиками, то для группы из $k \geq 10$ мальчиков, не знакомых с ней, найдется ровно k девочек, знакомых хотя бы с одним из них, – противоречие.

С.Волчёнков

М2058. *В выпуклом четырехугольнике пять из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.*

Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник, а E, I, F, K – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Равные отрезки из условия (их не меньше пяти) назовем *отмеченными*. Также будем называть *отмеченными* те из треугольников ABC, BCD, CDA, DAB, в которых две медианы отмеченные. Ясно, что отмеченный треугольник найдется; пусть это будет ABC. Из равенства медиан следует, что ABC равнобедренный: $AB = BC = a$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть отмеченным является треугольник CDA. Тогда ABC и CDA – равнобедренные треугольники с общим основанием и равными медианами к боковым сторонам. Значит, эти треугольники равны, откуда $CD = DA = a$. Отсюда легко вывести, что все 8 отрезков из условия задачи равны.

2. Пусть отмеченным является треугольник BCD (случай, когда отмечен ABD, аналогичен). Тогда $AB = BC = CD = a$. Без ограничения общности можно считать, что отмечен отрезок AF или BK (случаи, когда отмечен DE или CK, аналогичны). Если отмечен AF, то у треугольников ABC и CDA общая сторона AC, равные стороны BC и CD и равные медианы, проведенные к этим сторонам. Отсюда треугольники равны, и получаем $AB = BC = CD = DA = a$. Если отмечен BK, то у треугольников ABD и CBD общая сторона BD, равные стороны AB и BC и равные медианы, проведенные к третьим сторонам. Получим, что треугольники равны, и снова $AB = = BC = CD = DA = a$.

3. Пусть ни один из треугольников BCD, CDA, ADB не является отмеченным. Тогда в каждом из них отмечено ровно по одной медиане. В этом случае $AD \neq AB$, $CD \neq BC$, $AD \neq CD$. Разобьем теперь отрезки на пары (AF, CK), (BF, BK), (DE, DI). Ни в одной паре нет двух отмеченных отрезков. В самом деле, $AF \neq CK$, иначе $AD = CD$. Если $BF = BK$ или $DE = DI$, то треугольники ABD и CBD равны, и снова $AD = CD$ – противоречие. Значит, в каждой паре отмечен ровно один отрезок. Пусть в паре (DE, DI) отмечен DI, тогда в паре (BF, BK) отмечен BK. Если в паре (AF, CK) отмечен CK, то BKC и AID – равные треугольники

(равнобедренные с равными боковыми сторонами и общей медианой к основаниям), откуда $AD = a$, что невозможно. Значит, в паре (AF, CK) отмечен AF.

Итак, отмечены: AI, CE, AF, BK, DI. Пусть $AC = s$, $BD = t$, $AD = x$, $CD = y$. Тогда, приравняв длины медиан BK и DI в треугольниках ABD и BDC, а также длины медиан CE и AF в треугольниках ABC и CAD, получим: $2a^2 + 2t^2 - x^2 = 2y^2 + 2t^2 - a^2$, $2a^2 + 2s^2 - a^2 = 2x^2 + 2s^2 - y^2$, откуда $x^2 + 2y^2 = 3a^2$ и $2x^2 - y^2 = a^2$, и $x = y = a$ – противоречие.

Замечания

Из решения легко следует, что утверждение задачи верно в случае произвольной замкнутой четырехзвенной ломаной (не обязательно являющейся границей выпуклого четырехугольника).

Легко видеть, что имеются ровно две существенно различные ломаные, удовлетворяющие условию задачи, – квадрат $ABCD$ и ломаная $ABCD$, в которой совпадают точки A и C, а также B и D.

Частный случай задачи М2058, когда в выпуклом четырехугольнике, по условию, семь отрезков равны, предлагался на IV этапе XXXIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Н.Агаханов, В.Сендеров

М2059. *Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный куб натурального числа. Докажите, что она содержит и точный куб, не являющийся точным квадратом.*

Лемма. Если для некоторого натурального n число n^3 является точным квадратом, то число n также является точным квадратом.

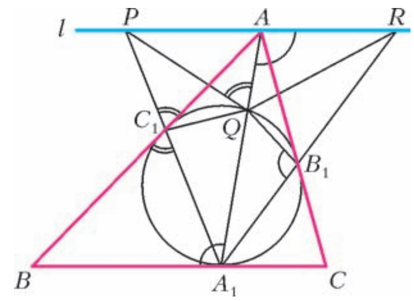
Доказательство. Пусть простое число p входит в разложение числа n на простые множители в степени t, тогда p входит в разложение числа n^3 в степени $3t$. По условию $3t$ четно, поэтому t четно. В силу произвольности p получаем, что n – точный квадрат. Лемма доказана.

Пусть в прогрессии с разностью $d > 0$ содержится куб натурального числа m. Если m^3 не является точным квадратом, то искомое число найдено. Иначе m^3 – точный квадрат и, согласно лемме, m – точный квадрат, $m = k^2$. Вместе с m^3 прогрессия содержит точный куб $A = \left(m + md^2\right)^3$, поскольку $A = m^3 + ld$, где l – натуральное. Докажем, что A не является точным квадратом. Пусть это не так, тогда по лемме $m + md^2 = k^2\left(1 + d^2\right)$ – точный квадрат. Отсюда $1 + d^2$ – точный квадрат, $1 + d^2 = x^2$ для натурального x. Получаем $1 = (x - d)(x + d)$, что невозможно.

И.Богданов, В.Сендеров

М2060. *Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Отрезок AA_1 вторично пересекает вписанную окружность в точке Q. Прямая ℓ параллельна BC и проходит через A. Прямые A_1C_1 и A_1B_1 пересекают ℓ в точках P и R соответственно. Докажите, что $\angle PQR = \angle B_1QC_1$.*

Так как BC – касательная к вписанной окружности (см. рисунок), то $\angle BA_1Q = \frac{1}{2}\overset{\smile}{A_1C_1Q} = \angle A_1B_1Q$; с другой стороны, $\angle BA_1A = \angle A_1AR$ как внутренние накрест лежащие. Поэтому $\angle QAR = \angle A_1B_1Q$, и четырехугольник ARB_1Q – вписанный. Аналогично, вписанным является и четырехугольник $PAQC_1$, поэтому



$$\angle PQR = \angle PQA + \angle RQA =$$
$$= \angle PC_1A + \angle RB_1A = \angle A_1C_1B + A_1B_1C .$$

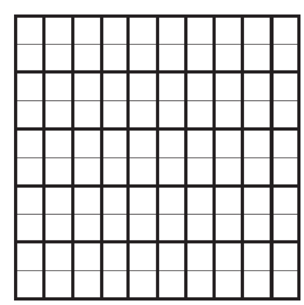
Поскольку оба слагаемых – углы между касательными и хордами, имеем

$$\angle PQR = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{A_1C_1} + \overset{\smile}{A_1B_1}\right) = \frac{1}{2}\overset{\smile}{B_1A_1C_1} = \angle B_1QC_1 ,$$

что и требовалось.

А.Полянский

М2061. *В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке – от 1 до 10 слева направо, во второй – от 11 до 20 слева направо и т.д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники 1×2, посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат?*



Ответ: на 50 вертикальных прямоугольников (см. рисунок).

Пронумеруем прямоугольники разбиения. Пусть в i-м прямоугольнике лежат числа a_i и b_i. Заметим, что $a_ib_i = \frac{a_i^2 + b_i^2}{2} - \frac{\left(a_i - b_i\right)^2}{2}$. Просуммировав эти равенства по всем прямоугольникам, получаем, что сумма всех 50 произведений равна

$$S = \frac{a_1^2 + \ldots + a_{50}^2 + b_1^2 + \ldots + b_{50}^2}{2} -$$
$$- \frac{\left(a_1 - b_1\right)^2 + \ldots + \left(a_{50} - b_{50}\right)^2}{2} .$$

Заметим, что первая дробь равна $\frac{1^2 + \ldots + 100^2}{2}$, т.е. не зависит от разбиения. В числителе же второй дроби каждый квадрат равен либо 1^2, либо 10^2 – в зависимости от того, горизонтален или вертикален i-й прямоугольник. Поэтому вторая дробь будет максимальна (а итоговая сумма – минимальна) тогда, когда все слагаемые в числителе будут равняться 100, т.е. когда все прямоугольники будут вертикальны.

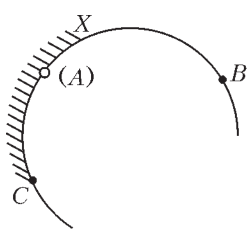
А.Бадзян

М2062. *Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полуокружность, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?*

Приведем один из возможных вариантов договоренности.

Рассмотрим 2007 дуг, на которые разбили окружность отмеченные точки. Пусть $\overset{\smile}{AB}$ – наибольшая из них (если их несколько, то возьмем любую), и пусть эта дуга лежит по часовой стрелке от точки A (и против часовой – от точки B). Тогда помощник должен стереть точку A.

Покажем, что фокусник сможет указать полуокружность, на которой находилась стертая точка. Войдя в комнату, он увидит окружность, разбитую на 2006 дуг. Ясно, что стертая точка будет находиться на наибольшей из дуг (она уже единственна, так как наибольшая дуга после стирания ее конца увеличилась). Более того, если сейчас наибольшая дуга – $\overset{\smile}{CB}$ (и она находится по часовой стрелке от C), то $\overset{\smile}{AB} \ge \overset{\smile}{CA}$ (см. рисунок). Поэтому если X – середина $\overset{\smile}{CB}$, то A лежит на $\overset{\smile}{CX}$. Следовательно, фокусник может выделить полуокружность, находящуюся по часовой стрелке от C (она содержит $\overset{\smile}{CX}$).



А.Акопян, И.Богданов

М2063. *Назовем многогранник хорошим, если его объем (измеренный в $м^3$) численно равен площади его поверхности (измеренной в $м^2$). Можно ли какой-нибудь хороший тетраэдр разместить внутри какого-нибудь хорошего параллелепипеда?*

Ответ: нельзя.

Предположим, что хороший тетраэдр объема V с площадью поверхности S помещен внутри хорошего параллелепипеда объема V', площади граней которого равны S_1, S_2, S_3 ($S_1 \ge S_2 \ge S_3$), а соответствующие высоты равны h_1, h_2, h_3. По условию $V = S$ и $V' = 2(S_1 + S_2 + S_3)$.

Впишем в тетраэдр сферу ω радиуса r. Так как $V = \frac{1}{3}Sr$, то $r = 3$. Сфера ω лежит между парой параллельных плоскостей, содержащих грани параллелепипеда, поэтому $h_1 > 2r = 6$. Отсюда

$$V' = S_1 h_1 > 6S_1 \ge 2(S_1 + S_2 + S_3) = V'.$$

Противоречие.

М.Мурашкин

М2064. *Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Отрезки CD и BE пересекаются в точке O. Пусть M и N – центры окружностей, вписанных в треугольники ADE и ODE соответственно. Докажите, что середина меньшей дуги DE лежит на прямой MN.*

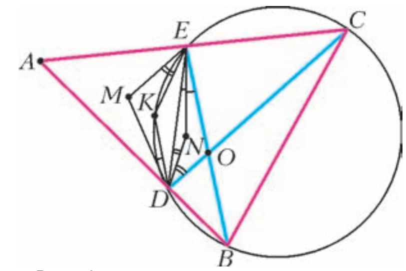


Рис. 1

Середину меньшей дуги DE обозначим через K (рис.1). Тогда

$$\angle MEK = \angle MED - \angle KED =$$
$$= \angle MED - \angle KCD = \frac{1}{2}\angle AED - \frac{1}{2}\angle ECD =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle AED - \angle ECD) = \frac{1}{2}\angle CDE = \angle EDN$$

(в частности, точка K лежит в $\angle MED$, так как $\angle MED - \angle KED > 0$). Аналогично, $\angle MDK = \angle DEN$.

Пусть прямые DK и EK пересекают описанную окружность треугольника DEM в точках P и Q соответственно (рис. 2). Так как $DK = EK$, то $\angle KED = \angle KDE = \angle PDE = \angle PQE$, откуда $PQ \parallel DE$. Далее, $\angle QPM = \angle QEM = \angle KEM = \angle EDN$ и, аналогично, $\angle PQM = \angle DEN$. Отсюда вытекает, что треугольники DEN и PQM гомотетичны, причем K является центром гомотетии (как точка пересечения прямых QE и PD). Следовательно, MN проходит через K.

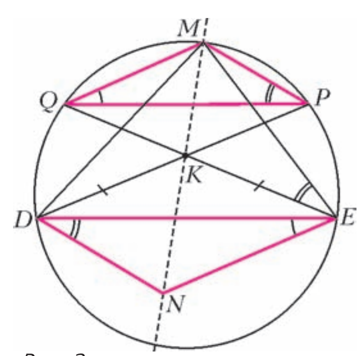


Рис. 2

М.Исаев

М2065. *В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.*

Назовем *особым* членом последовательности такой член x_n, для которого $[x_n] > [x_{n-1}]$. Очевидно, особых членов бесконечно много (так как если $[x_n] = k$, то $[x_{n+k}] > [x_n]$). Для каждого особого члена представим его дробную часть в виде несократимой дроби (если особый член – целое число, будем считать числитель его дробной части равным 0). Мы докажем, что числитель этой дроби у каждого следующего особого члена не больше, чем у предыдущего; кроме того, если этот числитель больше 0, то найдется особый член, у которого соответствующий числитель меньше.

Пусть x_k – особый член. Обозначим его целую часть через m (очевидно, $m \geq 2$), а дробную – через r. Поскольку $\left[x_{k-1}\right] = m-1$, то имеет место неравенство $r < \frac{1}{m-1} \leq \frac{2}{m}$. Если $r < \frac{1}{m}$, то следующие m членов последовательности будут равны $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{m}$, $x_{k+2} = x_k + \frac{2}{m}, \ldots, x_{k+m-1} = x_k + \frac{m-1}{m} = m + r + \frac{m-1}{m} < m+1$, $x_{k+m} = x_k + 1$. Как видно, x_{k+m} – очередной особый член, по сравнению с предыдущим его дробная часть не изменилась, а целая часть увеличилась на 1. Продолжая в том же духе, мы придем, наконец, к особому члену x_l, целая часть которого $p = \left[x_l\right]$ и дробная часть $s = \left\{x_l\right\}$ удовлетворяют условию $\frac{1}{p} \leq s < \frac{1}{p+1}$. Тогда следующие члены последовательности будут равны $x_{l+1} = x_l + \frac{1}{p}$, $x_{l+2} = x_l + \frac{2}{p}$, … …, $x_{l+p-2} = x_l + \frac{p-2}{p} = p + s + \frac{p-2}{p} < p + \frac{2}{p} + \frac{p-2}{p}p = p+1$, $x_{l+p-1} = x_l + \frac{p-1}{p} = (p-1) + \left(s - \frac{1}{p}\right)$. Новый особый член x_{l+p-1} имеет дробную часть $s - \frac{1}{p}$. Докажем, что числитель у нее меньше, чем у s. Действительно, если $s = \frac{a}{b}$, то $s - \frac{1}{p} = \frac{ap-b}{pb}$, и, поскольку $\frac{a}{b} < \frac{1}{p-1}$, выполняется неравенство $ap - a < b \Leftrightarrow ap - b < a$.

Итак, для каждого особого члена последовательности, дробная часть которого имеет ненулевой числитель, мы нашли особый член с меньшим числителем дробной части. Так как числитель – натуральное число, которое не может уменьшаться бесконечно много раз, в последовательности встретится член, дробная часть которого равна 0, что и требовалось доказать.

А.Голованов

Ф2073. *Тело движется вдоль координатной оси X, его скорость v пропорциональна корню квадратному из координаты x. В точке с координатой $x_1 = 100$ м скорость тела составляет $v_1 = 10$ м/с. Найдите ускорения в точках с координатами $x_2 = 20$ м и $x_3 = 300$ м.*

Запишем связь между координатой и скоростью тела в виде $v = k\sqrt{x}$, или $v^2 = k^2 x$. Возьмем производную по времени:

$$2vv' = k^2 x' = k^2 v .$$

Отсюда найдем ускорение тела:

$$a = v' = \frac{k^2}{2} = \text{const} .$$

Таким образом, движение тела оказывается равноускоренным. Учтем данные в условии: при $x_1 = 100$ м $v_1 = 10$ м/с, т.е. $k = 1$. Тогда для ускорения тела во всех точках получим

$$a = 0{,}5 \text{ м/с}^2 .$$

А.Простов

Ф2074. *На наклонной плоскости с углом α при основании удерживают клин массой M (рис.1). Угол при основании клина также равен α, а расположен клин «вверх ногами», так что его верхняя поверхность параллельна плоскости земли. На этой поверхности находится очень легкая тележка с четырьмя массивными колесами – масса каждого колеса m. Трение между поверхностью клина и колесами достаточно велико, поэтому колеса не проскальзывают. Клин отпускают. Найдите его ускорение при движении (пока тележка еще находится на клине). Масса каждого колеса сосредоточена в его ободе.*

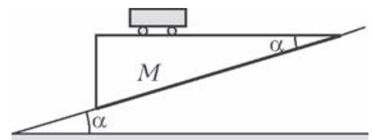


Рис. 1

Обозначим ускорение клина – ясно, что оно направлено вдоль наклонной плоскости – буквой a, тогда горизонтальная составляющая этого ускорения равна $a\cos\alpha$, а вертикальная составляет $a\sin\alpha$. При движении тележки без проскальзывания ее вертикальное ускорение такое же, как у клина, а ускорение нижней точки каждого из колес равно горизонтальному ускорению клина. При этом ускорение оси каждого колеса по горизонтали ровно вдвое меньше, чем ускорение нижней точки (это правильно только для случая, когда масса колеса распределена по его ободу и поэтому момент инерции колеса составляет mR^2, где R – радиус колеса). Напомним, что сила трения F в нашем случае вовсе не равна μN!

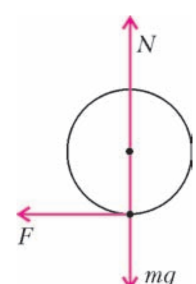


Рис. 2

Запишем уравнения динамики для тележки (рис.2) – по горизонтали и вертикали (напомним, что у тележки 4 колеса):

$$4F = 4m \cdot \frac{1}{2}(a\cos\alpha) ,$$

$$4mg - 4N = 4m(a\sin\alpha)$$

и для клина (рис.3) – в проекции на направление вдоль наклонной плоскости:

$$(Mg + 4N)\sin\alpha - 4F\cos\alpha = Ma .$$

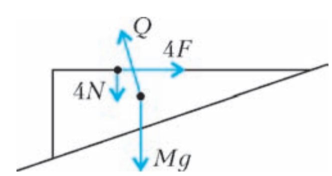


Рис. 3

Решая эти уравнения, найдем искомое ускорение клина:

$$a = g\frac{(M+4m)\sin\alpha}{M + 2m + 2m\sin^2\alpha} .$$

Т.Committee

Ф2075. *В компьютерной модели рассматривается кубический сосуд объемом 1 м^3, заполненный «газом»*

– в сосуде находятся 1000 частиц диаметром 1 мм каждая и 2 частицы диаметром 1 см. В начальный момент маленькие частицы неподвижны, большие имеют скорости по 100 м/с. Оцените число ударов больших частиц о стенки сосуда за большое время – за 10 лет. Оцените также число столкновений больших частиц с маленькими за то же время. Считайте, что частицы «сделаны» из одного и того же материала. Внешние силы в модели не предусмотрены, удары считаются упругими.

Обозначим массу малой частицы через m, тогда масса большой частицы в 1000 раз больше, т.е. $1000\,m$. Пусть $v_1 = \sqrt{\overline{v_1^2}}$ – среднеквадратичное значение скорости малой частицы, тогда среднеквадратичная скорость большой частицы $v_2 = \sqrt{\overline{v_2^2}} \approx \frac{v_1}{\sqrt{1000}}$. Будем считать, что энергия поровну распределена между всеми частицами. Таким образом, $v_1 \approx 140$ м/с, $v_2 \approx 3$ м/с. Оценим длину свободного пробега большой частицы:

$$\lambda \approx \frac{V}{\pi D^2 N} \approx \frac{1\ м^3}{3{,}14\cdot 10^{-4}\ м^2\cdot 10^3} \approx 3\ м .$$

При расчете числа ударов больших частиц о стенки сосуда не будем учитывать соударения частиц друг с другом:

$$N_1 \approx \frac{\frac{v_2}{\sqrt{3}}\tau}{2\sqrt[3]{V}}\cdot 6\cdot 2 \approx \frac{1{,}7\ м/с\cdot 10\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\ с}{2\cdot 1\ м}\cdot 12 \approx 3\cdot 10^9 .$$

Большие частицы летают во много раз медленнее малых, поэтому число соударений больших частиц с малыми можно рассчитывать, как удары малых частиц о стенки:

$$N_2 = \frac{\frac{v_1}{\sqrt{3}}\tau}{2\sqrt[3]{V}}\cdot\frac{2\cdot\frac{\pi D^2}{4}}{S_{стенки}}\cdot N \approx \frac{\frac{140}{\sqrt{3}}\ м/с\cdot 10\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\ с}{2\cdot 1\ м}\times \frac{3{,}14\cdot (0{,}01)^2\ м^2}{2\cdot 1\ м^2}\cdot 1000 \approx 2\cdot 10^9 .$$

А.Старов

Ф2076. *В схеме неуравновешенного «мостика» (рис.1) два резистора имеют сопротивления по 10 Ом, два – по 30 Ом. В диагональ мостика включен амперметр, имеющий пренебрежимо малое сопротивление. Батарейка напряжением 3 В подключена к другой диагонали мостика. Вместо одного из резисторов подключают еще одну такую же батарейку. Найдите максимальное и минимальное возможные значения тока через амперметр в получившейся схеме.*

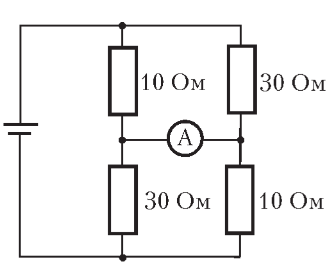


Рис. 1

Тут важно не пропустить возможных вариантов подключения батарейки. В силу явной симметрии схемы, достаточно рассмотреть подключение батарейки вместо резистора сопротивлением 10 Ом (любого из двух) и вместо резистора сопротивлением 30 Ом (тоже любого из двух), но в каждом из этих случаев нужно предусмотреть подключение в двух возможных полярностях (рис.2). В схеме 1 токи через верхние резисторы

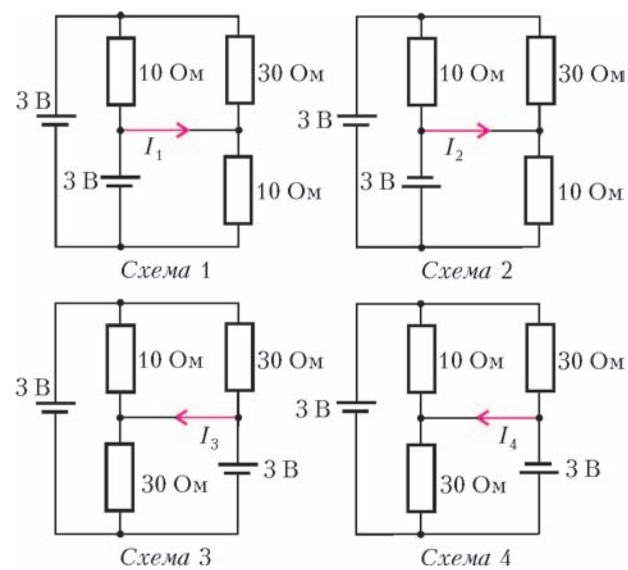


Рис. 2

отсутствуют, тогда через амперметр течет ток $I_1 = 0{,}3$ А. То же – для схемы 3: $I_3 = 0{,}1$ А. Для схем 2 и 4 напряжения, приложенные к верхним резисторам, равны 6 В. Для схемы 2 сразу можно найти ток через амперметр (рис.3):

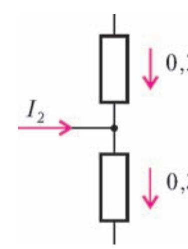


Рис. 3

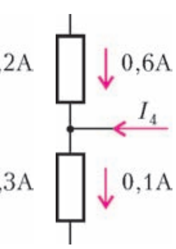


Рис. 4

$$I_2 + 0{,}2\ А = 0{,}3\ А, \text{ и } I_2 = 0{,}1\ А .$$

Для схемы 4 (рис.4):

$$0{,}6\ А + I_4 = 0{,}1\ А, \text{ и } I_4 = -0{,}5\ А .$$

Видно, что ток течет в противоположную сторону! Итак, наименьшее значение тока через амперметр равно 0,1 А, а наибольшее значение составляет 0,5 А. Заметим, что в схемах на рисунках 2–4 всюду вместо идеального амперметра нарисован кусок провода – для упрощения внешнего вида схем.

З.Рафаилов

Ф2077. *На тороидальный сердечник, сделанный из сплава с очень большой магнитной проницаемостью, намотаны три одинаковые катушки индуктивностью L = 1 Гн каждая (рис.1). К выводам одной из катушек подключен резистор сопротивлением R = = 100 Ом, две другие катушки соединены последова-*

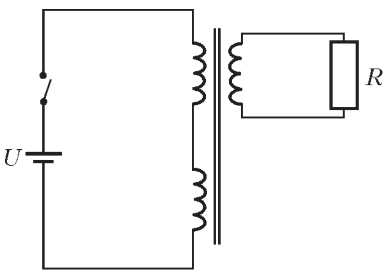


Рис. 1

тельно (начало одной – к концу другой). К свободным выводам получившейся «двойной» катушки подключают батарейку напряжением U = 3 В. Через время $\tau = 0{,}5$ с батарейку отключают. Какой ток течет через батарейку через время $0{,}5\tau$ после включения? Какое количество теплоты выделится в резисторе за время τ после включения и после отключения батарейки?

Сразу после включения батарейки токи через катушки будут изменяться так, что сумма ЭДС индукции первичных обмоток будет в любой момент равна напряжению батарейки U. Обмотки одинаковые, значит, ЭДС индукции вторичной обмотки равна $U/2$, и через резистор будет течь неизменный ток

$$I_2 = \frac{U/2}{R} = \frac{U}{2R} = 0{,}015 \text{ А}$$

все время, пока подключена батарейка. Магнитный поток через обмотки не может изменяться мгновенно, скачком, а ток через вторичную обмотку должен возникнуть сразу после подключения батарейки. Это значит, что ток через первичные обмотки тоже возникнет мгновенно. Величина этого тока будет равна

$$I_1 = \frac{1}{2} I_2$$

(не должен мгновенно измениться *суммарный* магнитный поток, создаваемый токами всех обмоток). Ток вторичной обмотки не меняется, при расчете ЭДС индукции его можно не учитывать:

$$2L \frac{\Delta I_{\text{бат}}}{\Delta t} = U ,$$

откуда

$$I_{\text{бат}} = -\frac{1}{2} I_2 + \frac{U}{2L} t .$$

Для момента $t = \tau/2$ (рис.2) ток, текущий через батарейку, равен

$$I_1^* = -\frac{1}{2}\frac{U}{2R} + \frac{U\tau/2}{2L} = 0{,}3675 \text{ А} .$$

Рассчитаем теперь количество теплоты, выделяющееся в резисторе за время $\tau = 0{,}5$ с после включения батарейки:

$Q_1 =$

$= I_2^2 R\tau = 0{,}01125$ Дж.

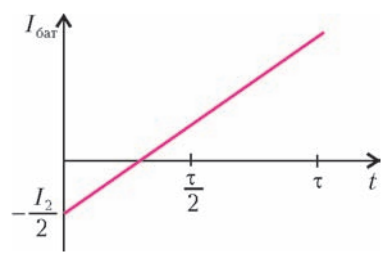


Рис. 2

После отключения батарейки ток вторичной обмотки увеличивается скачком (магнитный поток через нее мгновенно измениться не может):

$$I_2^* = I_2 + 2\frac{U\tau}{2L} = 1{,}515 \text{ А} .$$

За время $\tau = 0{,}5 \text{ с} \geq \frac{L}{R} = 0{,}01 \text{ с}$ после отключения батарейки практически вся энергия катушки перейдет в тепло:

$$Q_2 = \frac{L I_2^{*2}}{2} \approx 1{,}15 \text{ Дж} .$$

А.Зильберман

Две знаменитые формулы

(Начало см. на с. 11)

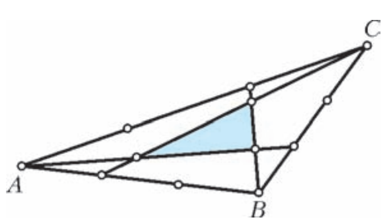


Рис. 16

15. Каждая сторона треугольника ABC разделена на три равные части и одна из точек деления соединена с вершиной так, как это показано на рисунке 16. Сравните площадь выделенного треугольника с площадью треугольника ABC.

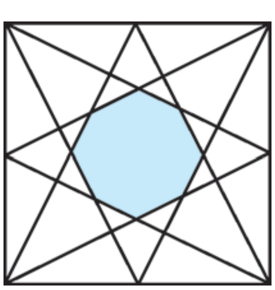


Рис. 17

16. Середины сторон квадрата соединены отрезками так, как это показано на рисунке 17. Найдите отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведенными отрезками.

17. Пусть

$$f(P) = aN_i(P) + bN_e(P) + c ,$$

где a, b, c – некоторые числа. Пусть эта функция, заданная на всех простых многоугольниках, расположенных на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$, такова, что $f(P) = f(P_1) + f(P_2)$, если P разбит некоторой ломаной с вершинами в узлах решетки на два простых многоугольника P_1 и P_2. Докажите, что $b = a/2$ и $c = -a$.

18. Докажите, что для любого простого многоугольника P на решетке $\mathbb{Z}^2$ имеет место равенство

$$2[P] = N(2P) - 2N(P) + 1 ,$$

где $N(P)$ обозначает полное число узлов решетки, расположенных как внутри, так и на границе многоугольника P, а $2P$ – многоугольник, полученный из P растяжением в два раза относительно начала координат.

19. Укажите на плоскости 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и такие, что расстояние между любыми двумя точками выражается иррациональным числом, а площадь любого треугольника, с вершинами в этих точках, выражается рациональным числом.

Задачи

1. Решите *устно:* сколько сомножителей нужно написать в произведении первых нечетных чисел, чтобы равенство

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots = 135135$$

оказалось верным?

Я.Камыш

2. Десятизначное число 2100010006 примечательно тем, что оно «описывает само себя», т.е. его первая цифра равна количеству единиц в нем, вторая – количеству двоек, ..., девятая – количеству девяток, десятая – количеству нулей. Существуют ли два десятизначных числа, каждое из которых таким же способом описывает второе?

И.Акулич

3. а) Из шести отрезков разной длины составлена треугольная пирамида. Верно ли, что из этих же отрезков всегда можно составить два отдельных (несоприкасающихся) треугольника? б) Из шести отрезков разной длины составлены два отдельных (несоприкасающихся) треугольника. Верно ли, что из этих же отрезков всегда можно составить треугольную пирамиду?

Г.Гальперин

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

4. Существуют ли такие натуральные числа x, y, z, что $x \cdot 2^x + y \cdot 2^y = z \cdot 2^z$?

В.Сендеров

5. В городе Удираевске сеть дорог устроена так, что из каждого перекрестка можно попасть на любой другой перекресток, а тупиков в городе нет. В начальный момент Неуловимый Джо и двое полицейских находятся на разных перекрестках, а затем начинают двигаться по дорогам. За один ход Джо перемещается на соседний перекресток или остается на месте; следующим ходом полицейские одновременно перебираются на соседние с ними перекрестки. Нарисуйте одну из возможных схем дорог города Удираевска, на которых Неуловимый Джо, зная местоположение полицейских, всегда сможет избежать поимки.

К.Каибханов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Будет ЕГЭ по математике!

Л.ДЕНИЩЕВА, Б.ПИСАРЕВСКИЙ

Эксперимент по проведению в нашей стран единого государственного экзамена (ЕГЭ) начался в 2001 году. Введение ЕГЭ сопровождалось яростными спорами сторонников и противников этого метода итоговой аттестации выпускников средней школы и отбора наиболее подготовленных для зачисления в вузы. Дискуссии на эту тему возникают и сейчас, но ситуация радикально изменилась. В 2007 году Государственная дума и Совет Федерации приняли закон об обязательности ЕГЭ, и этот закон подписал Президент РФ. Начиная с 2009 года, ЕГЭ по математике, физике, большинству других предметов полностью заменят выпускные экзамены в школах и вступительные экзамены в высших учебных заведениях. В 2008 году ЕГЭ по математике и русскому языку станут обязательными для выпускников московских школ.

За время проведения эксперимента содержание ЕГЭ по математике плавно изменялось, пока в 2005 году организаторы не нашли оптимальную, с их точки зрения, форму, которая сохраняется и сейчас.

Вариант ЕГЭ по математике состоит из трех частей.

В Части 1 представлены задания базового уровня сложности. С их помощью проверяется, как выпускники умеют применять изученный теоретический материал (правила, формулы, свойства и т.п.) в знакомой ситуации. Формулировки заданий традиционны для школьных учебников по курсу алгебры и начал анализа.

В этой части представлены задания с выбором ответа (из четырех возможных) и задания с кратким ответом.[1]

Задания Части 1 успешно выполняют большинство учащихся, имеющих школьную оценку «3», а также практически все выпускники, имеющие оценку «4» и «5».

В Часть 2 варианта ЕГЭ включены задания повышенного уровня сложности. При их выполнении выпускник должен применить изученный материал в несколько измененной ситуации:

- либо преобразовать исходные данные задачи, чтобы стало возможно применить стандартный метод решения;
- либо перестроить в соответствии с данными задачи имеющийся метод решения.

Во второй части работы представлены два типа заданий: задания с кратким ответом и задания с развернутым ответом.[2] Задания этой части оказываются по силам лишь половине тех выпускников, которые имеют школьную оценку «4», и большинству выпускников, имеющих оценку «5». С отдельными заданиями повышенного уровня сложности справляется совсем незначительная часть выпускников, имеющих оценку «3».

В Части 3 варианта ЕГЭ представлены задания высокого уровня сложности. При их выполнении, исходя из всего багажа имеющихся знаний, выпускнику необходимо самостоятельно сконструировать новый метод решения, исследуя описанную в условии задачи проблему. Кроме того что выпускник найдет путь, приводящий его к ответу на вопрос задачи, он должен будет грамотно, используя принятую терминологию и символику, записать обоснованное решение.

С заданиями Части 3 справляются только те выпускники, которые имеют самый высокий уровень математической подготовки. Они составляют от 10% до 20% выпускников, имеющих школьную оценку «5».

Ниже приведен один из вариантов ЕГЭ по математике, который предлагался в 2007 году. На выполнение работы дается 4 часа (240 мин).

За выполнение работы выставляются две оценки: аттестационная отметка и тестовый балл. Аттестационная отметка за усвоение курса алгебры и начал анализа 10–11 классов выставляется по пятибалльной шкале. При ее выставлении не учитывается выполнение четырех заданий (В9, В10, В11, С4). В тексте работы номера этих заданий отмечены звездочкой. Тестовый балл выставляется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Вариант 2007 года

Часть 1

А1. Упростите выражение $b^{-3,4}\cdot 5b^{0,2}$.

1) $5b^{-3,6}$; 2) $5^{0,2}b^{-3,2}$; 3) $5b^{-3,2}$; 4) $5^{0,2}b^{-3,6}$.

А2. Вычислите $\dfrac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}}$.

1) 1; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) 9; 4) 27.

А3. Вычислите $\log_2 80 - \log_2 5$.

1) 0; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

А4. Функция задана графиком (рис.1). На каком из указанных промежутков она возрастает?

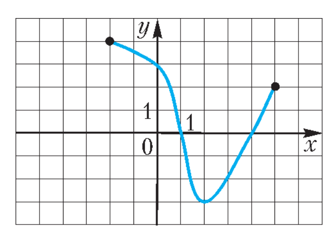


Рис. 1

1) [1; 4]; 2) [2; 5]; 3) [0; 5]; 4) [−2; 1].

А5. Найдите производную функции $y = 12x^3 - e^x$.

1) $y' = 15x^2 - xe^{x-1}$; 2) $y' = 3x^2 - \dfrac{e^x}{x+1}$;

3) $y' = 36x^2 - xe^{x-1}$; 4) $y' = 36x^2 - e^x$.

А6. Найдите множество значений функции $y = 3\sin x$.

1) [−3; 3]; 2) [0; 3]; 3) [−1; 1]; 4) $(-\infty; +\infty)$.

А7. Функция задана графиком (рис.2). Укажите промежуток, на котором она принимает только отрицательные значения.

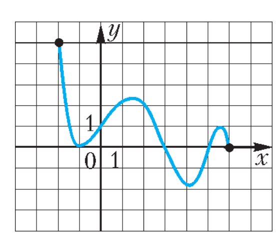


Рис. 2

1) (3; 6); 2) (3; 5); 3) (−2; −1); 4) (−2; 0).

А8. Решите неравенство $\dfrac{3+x}{(x-9)(x-1)} \le 0$.

---

[1] *Правильность выполнения этих заданий оценивается только по конечному ответу, внесенному в бланк ответов.*

[2] *При выполнении этих заданий решение выпускника проверяется и оценивается максимально 2 баллами двумя независимыми экспертами.*

1) $(-\infty; -3]$; 2) $(-\infty; -3] \cup (1; 9)$; 3) $(-\infty; -9)$;
4) $[-3; 1) \cup (9; +\infty)$.

A9. Решите уравнение $\sin x - \frac{1}{2} = 0$.

1) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$;

3) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$.

A10. Найдите область определения функции
$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{5-4x} - \frac{1}{27}}.$$

1) $[0,5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0,5]$; 3) $(0,5; +\infty)$; 4) $[2; +\infty)$.

B1. Найдите значение выражения $3\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha$, если $\cos\alpha = -0,5$.

B2. Решите уравнение $3^{x+2} + 6 \cdot 3^x = 5$.

B3. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x$.

Часть 2

B4. Найдите значение выражения $\cos x$, если известно, что
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ 2\cos x + 8\sin y = 3. \end{cases}$$

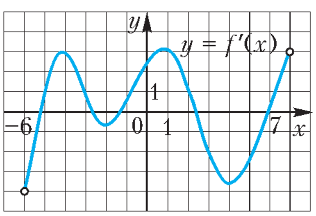


Рис. 3

B5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рисунке 3 изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, параллельные прямой $y = 3 - x$ (или совпадающие с ней). Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.

B6. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{\left(37 - 20\sqrt{3}\right)^2} + 2\sqrt{3}$.

B7. Решите уравнение
$$\log_7(3x+5) + \sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)} = 0.$$

(Если уравнение имеет более одного корня, то запишите произведение всех его корней.)

B8. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. На рисунке 4 изображен график этой функции при $-2 \le x \le 1$. Найдите значение выражения $f(-5) - f(-1) + f(12)$.

Рис. 4

B9*. Две бригады, работая вместе, ремонтировали дорогу в течение 6 дней, а затем одна вторая бригада закончила ремонт еще за 10 дней. За сколько дней могла бы отремонтировать дорогу одна первая бригада, если она может выполнить эту работу на 6 дней быстрее, чем одна вторая бригада?

B10*. Точки K и M лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла наклона прямой KM к плоскости основания цилиндра равен 0,6, $KM = 10$, объем цилиндра равен 150π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

B11*. Боковая сторона равнобедренного треугольника ABC равна 15, а его площадь равна 67,5. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BE и AH, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь треугольника BOH.

C1. Найдите точки минимума функции
$$f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 72x^2 + 2^{-\log_{0,5}\left(x^3+8\right)}.$$

C2. Решите уравнение
$$x^2 + x = 0,5(6 - x) + \sqrt{2x^2 + 3x + 2}.$$

Часть 3

C3. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(-3; -1]$ значение выражения $x^4 - 8x^2 - 2$ не равно значению выражения ax^2.

C4*. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на сторонах AD, A_1B_1, B_1C_1 его оснований лежат точки L, K, M соответственно так, что $AL : LD = 2 : 5$, $A_1K : KB_1 = 2 : 3$, $B_1M : MC_1 = 5 : 2$. Во сколько раз объем параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной K и основанием $LDMB_1$?

C5. Докажите, что система уравнений
$$\begin{cases} 15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = 0, \\ 9\sin\frac{\pi}{x} + \cos\left((5x+1)y\right) = \\ \qquad = y\left(y + \frac{2}{x} - 1\right) + \sqrt{\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x)}\sin y \end{cases}$$
не имеет решений.

Далее в статье приводятся ответы к наиболее простым задачам, указания к решениям, полные решения и комментарии к ним для более сложных задач. Мы настоятельно рекомендуем читателям-выпускникам закрыть этот текст листом бумаги или тетрадкой, постараться решить задачи самостоятельно и только после этого проверить ответы.

Напоминаем, что на реальном ЕГЭ пользоваться справочниками и калькулятором не разрешается.

Ответы к задачам Части 1

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	B1	B2	B3
3	1	4	2	4	1	2	2	3	1	1	−1	−2

B4. Выразим y из первого уравнения системы, подставим во второе и используем формулу приведения. *Ответ:* 0,3.

Комментарии. При всей простоте этого задания при его выполнении у менее подготовленных выпускников возникают трудности и сомнения, связанные с формируемым в школе стереотипом решения систем уравнений. В предложенном задании требуется найти значение $\cos x$, а не множество пар чисел (x, y), являющихся решением данной системы. Именно поставленный вопрос и вызывает затруднение слабых учащихся. В целом с заданием справилось менее 40% выпускников.

B5. Заданная в условии задачи прямая $y = 3 - x$ имеет угловой коэффициент $k = -1$. Осталось выяснить, сколько найдется точек на графике, в которых $f'(x) = -1$. *Ответ:* 3.

Комментарии. Как мы видим из приведенного решения, при выполнении этого задания выпускнику не требуется проводить какие-либо преобразования или вычисления. Здесь проверяется владение геометрическим смыслом производной, а все числовые данные представлены на рисунке, который нужно только «прочитать». Вместе с тем, решение задачи вызвало серьезные затруднения у выпускников (справились с заданием менее трети участников экзамена).

Вероятнее всего, дело в том, что в школьных учебниках обычно по графику производной требуется определить угловой коэффициент касательной, проведенной в точке с заданной абсциссой x_0. Здесь же приведена (в определенном смысле) обратная задача.

В6. Для любого действительного числа справедливо равенство $\sqrt[4]{a^4} = |a|$. Чтобы использовать это равенство для выполнения задания, проверим, нельзя ли выражение $37 - 20\sqrt{3}$ представить в виде квадрата двучлена: $37 - 20\sqrt{3} = 25 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3} + 12 = \left(5 - 2\sqrt{3}\right)^2$. Учитывая полученный результат, преобразуем исходное выражение:

$$\sqrt[4]{\left(37 - 20\sqrt{3}\right)^2} + 2\sqrt{3} = \sqrt[4]{\left(5 - 2\sqrt{3}\right)^4} + 2\sqrt{3} = \left|5 - 2\sqrt{3}\right| + 2\sqrt{3} =$$

$$= 5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5,$$

так как $5 - 2\sqrt{3} > 0$.

Комментарии. При выполнении этого задания можно было бы к конечному результату двигаться постепенно, воспользовавшись тем, что для произвольного действительного числа a справедливо равенство $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{|a|}$. В нашем случае $a = 37 - 20\sqrt{3}$, и надо выяснить, какой знак имеет это число (напоминаем, что калькулятора, к сожалению, нет). Поскольку $37^2 = 1369$, а $\left(20\sqrt{3}\right)^2 = 1200$, то ясно, что $a > 0$, так что исходное выражение принимает вид $\sqrt{37 - 20\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}$. После этого можно начать размышлять и вычислять, квадратом какого числа является подкоренное выражение. Решение получается гораздо быстрее, если вспомнить, что ответом в задаче может быть только десятичное число. Это значит, что должно выполняться равенство $\sqrt{37 - 20\sqrt{3}} = x - 2\sqrt{3}$, где x – десятичное число. Из этого равенства легко получается, что $x = 5$, это и есть ответ к задаче.

В7. Поскольку $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, уравнение принимает вид $\log_7(3x+5) + \left|\log_7(2x+5)\right| = 0$ и распадается на две системы:

$$\begin{cases} \log_7(2x+5) \ge 0, \\ \log_7(3x+5) + \log_7(2x+5) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \log_7(2x+5) < 0, \\ \log_7(3x+5) - \log_7(2x+5) = 0. \end{cases}$$

После отбрасывания логарифмов эти системы выглядят так:

$$\begin{cases} x \ge -2, \\ (3x+5)(2x+5) = 1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x < -2, \\ \dfrac{3x+5}{2x+5} = 1. \end{cases}$$

Вторая система решений не имеет, из двух корней квадратного уравнения первой системы неравенству $x \ge -2$ удовлетворяет только ответ задачи $x = -1{,}5$.

Комментарии. Здесь приведено стандартное решение уравнения, содержащего переменную под знаком модуля. Однако выпускник, имеющий хороший уровень подготовки, проанализировав условие задачи и найдя область определения первого логарифмического выражения ($x > -\dfrac{5}{3}$), легко заметит, что значение выражения, стоящего под знаком второго логарифма, всегда больше 1, т.е. $\log_7(2x+5) > 0$ при любом x, удовлетворяющем условию $x > -\dfrac{5}{3}$. Таким образом, решение приведенного выше уравнения будет сводиться к решению уравнения $\log_7(3x+5) + \log_7(2x+5) = 0$. [3]

В8. То обстоятельство, что для заданной на всей числовой прямой функции $y = f(x)$ число 3 является периодом, означает, что для любого значения x выполняется равенство $f(x+3) = f(x-3) = f(x)$. Поэтому $f(-5) = f(-5+3) = f(-2) = -3$. Непосредственно из данного графика находим, что $f(-1) = 3$. Наконец, $f(12) = f(9) = f(6) = f(3) = f(0) = 2$. В итоге значение искомого выражения равняется $-3 - 3 + 2 = -4$.

Комментарии. Заметим, что в школьных учебниках при исследовании свойств функций уделяется мало внимания свойству периодичности. Число упражнений на закрепление определения понятия периодичности невелико, основная часть их посвящена исследованию периодичности тригонометрических функций. Поэтому формулировка задачи могла показаться части учащихся необычной. На самом же деле, как видно из приведенного решения, из теоретического материала в нем используется лишь определение периодической функции.

В9. Если первая бригада может отремонтировать дорогу за x дней, то вторая – за $x + 6$ дней. Из условия задачи имеем уравнение $\dfrac{6}{x} + \dfrac{16}{x+6} = 1$. Положительный корень квадратного уравнения есть $x = 18$.

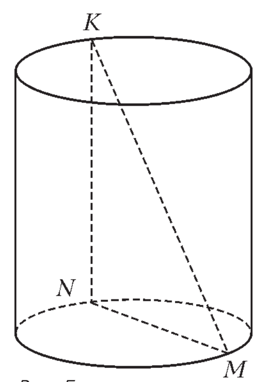


Рис. 5

В10. Через точку K, лежащую на окружности верхнего основания цилиндра, проведем образующую цилиндра KN (рис. 5). Теперь из прямоугольного треугольника KMN можно найти KN, т.е. высоту H цилиндра. Зная объем цилиндра и его высоту, легко находим радиус основания R. Площадь осевого сечения цилиндра есть $S = 2RH$. *Ответ:* 60.

В11. Данный равнобедренный треугольник с высотами BE и AH изображен на рисунке 6. По известной площади ABC и стороне BC находим, что $AH = 9$. Теперь в прямоугольном треугольнике ABH получаем, что $BH = 12$, поэтому $HC = 3$. Отсюда $\operatorname{tg}\angle HCE = 3$, но $\angle BOH = \angle HCE$. Получается, что $OH = BH \operatorname{ctg}\angle BOH = 12 \cdot \dfrac{1}{3} = 4$, и искомая площадь треугольника BOH есть $S = \dfrac{1}{2} BH \cdot OH = 24$.

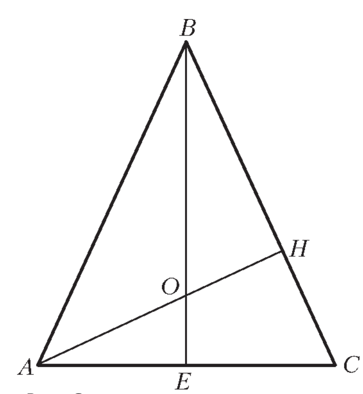


Рис. 6

Другой возможный способ отыскания длины отрезка OH основан на свойстве биссектрисы BO в треугольнике ABH, т.е. на пропорции $\dfrac{OH}{AH - OH} = \dfrac{BH}{AB}$.

[3] *Заметим, что в большинстве задач Части 2 анализ исходных данных задачи позволяет упростить (сократить) стандартные процедуры решения. Решение задачи «в лоб» приводит к более громоздким преобразованиям и вычислениям, а также к потере времени.*

С1. Область определения данной функции задается условием $x^3+8>0$. Поскольку $x^3+8=(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$ и неполный квадрат принимает только положительные значения, то $f(x)$ определена при $x\in(-2;+\infty)$. Далее, $2^{-\log_{0,5}\left(x^3+8\right)}=\left(2^{-1}\right)^{\log_{0,5}\left(x^3+8\right)}=0,5^{\log_{0,5}\left(x^3+8\right)}=x^3+8$, и данная функция задается формулой $f(x)=3x^4+4x^3-72x^2+8$ на области определения $D(f)=(-2;+\infty)$. Требуется найти точки минимума этой функции, лежащие в промежутке $(-2;+\infty)$. Для их отыскания находим производную:

$$f'(x)=12x^3+12x^2-144x=12x\left(x^2+x-12\right)=$$
$$=12x(x-3)(x+4).$$

Нули производной есть $x=-4$, $x=0$, $x=3$, а знаки производной легко определяются методом интервалов: $f'(x)>0$ при $x\in(-4;0)\cup(3;+\infty)$ и $f'(x)<0$ при $x\in(-\infty;-4)\cup(0;3)$. Вспомним теперь, что на все эти промежутки надо наложить область определения – промежуток $(-2;+\infty)$. В итоге приходится делать выбор из двух точек $x=0$ и $x=3$. Поскольку при $x\in(0;3)$ данная функция убывает, а при $x\in(3;+\infty)$ возрастает, то минимум достигается при $x=3$.

Комментарии. Заметим, что при выполнении этого задания выпускники должны показать владение стандартным умением найти точку минимума функции. Трудность задания состояла в том, чтобы, во-первых, правильно выполнить преобразования выражений, входящих в формулу, задающую функцию, а во-вторых, правильно указать область определения функции и не забыть ее при исследовании.

С исследованием функции справились около четверти выпускников, имеющих оценку «4», и около 80% выпускников, имеющих оценку «5». Одна из основных ошибок состояла в том, что выпускники забыли учесть область определения исходной функции.

С2. Отметим, что $2x^2+3x+2>0$ при всех x, так что никаких ограничений на корни уравнения нет. Избавимся для начала от дробных коэффициентов, умножив обе части уравнения на 2. После приведения подобных членов получается уравнение $2x^2+3x-6=2\sqrt{2x^2+3x+2}$. Замена $2x^2+3x=y$ приводит к стандартному иррациональному уравнению $y-6=2\sqrt{y+2}$, после возведения обеих частей в квадрат получается уравнение $y^2-16y+28=0$, корень $y=2$ – посторонний и остается корень $y=14$. Уравнение $2x^2+3x-14=0$ имеет корни $x_1=-3,5$, $x_2=2$, это и есть ответ к задаче.

Если догадаться сделать замену $t=\sqrt{2x^2+3x+2}, t>0$, то получается уравнение $t^2-2t-8=0$ с единственным (удовлетворяющим условию $t>0$) корнем $t=4$. Такой путь немного быстрее приводит к ответу.

Комментарии. Для выпускников это задание оказалось более трудным, чем предыдущее. Уравнение решили около 70% выпускников, имеющих оценку «5», и лишь десятая часть выпускников, имеющих оценку «4». Дело в том, что стандартный метод решения иррациональных уравнений – возведение в квадрат – приводит к громоздким выкладкам с многочленом четвертой степени, и многие учащиеся не смогли довести решение до конца.

С3. Условие задачи $x^4-8x^2-2\neq ax^2$ при $x\in[-3;-1]$ означает, что функция $f(z)=z^2-(a+8)z-2$, где $z=x^2$, не обращается в 0 на промежутке $z\in[1;9)$. Данная функция есть квадратный трехчлен с положительным дискриминантом. Два его корня z_1, z_2 имеют разные знаки, так как по теореме Виета $z_1\cdot z_2=-2$. Парабола, являющаяся графиком этого трехчлена, направлена осями вверх, при этом мы не знаем знака абсциссы вершины параболы. В итоге мы имеем или график, изображенный на рисунке 7, или аналогичный с отрицательной, а может быть и нулевой, абсциссой вершины параболы. В силу очевидного условия $z\geq 0$ часть параболы, соответствующая отрицательным значениям аргумента, является фиктивной.

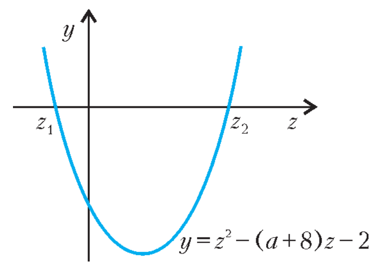


Рис. 7

Чтобы $f(z)$ не имела корней при $z\in[1;9)$, необходимо и достаточно, чтобы точка z_2 не попадала в этот промежуток, иначе – чтобы выполнялось одно из неравенств $z_2\geq 9$ или $z_2<1$. Длинный и хлопотный путь дальнейшего решения состоит в том, чтобы явно записать корень z_2 и затем решать два неравенства. Много проще обратиться к рисункам 8 и 9, иллюстрирующим описанную выше ситуацию.

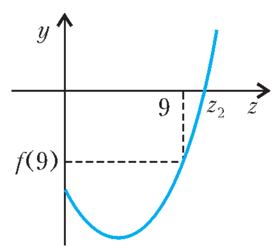


Рис. 8

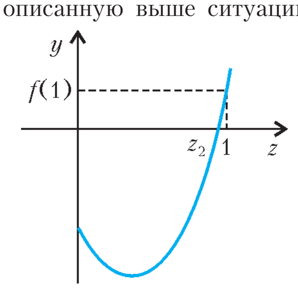


Рис. 9

Из рисунка 8 видно, что, для того чтобы выполнялось условие $z_2\geq 9$, необходимо и достаточно потребовать $f(9)\leq 0$, или $81-9(a+8)-2\leq 0$, откуда $a\geq 7/9$. Из рисунка 9 видно, что, для того чтобы выполнялось условие $z_2<1$, необходимо и достаточно потребовать $f(1)>0$, или $1-(a+8)-2>0$, откуда $a<-9$. Итого, $a\in(-\infty;-9)\cup\left[\frac{7}{9};+\infty\right)$. Легко проверяется, что изменение на чертеже положения вершины параболы никак не повлияет на окончательный результат.

С4. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный прямоугольный параллелепипед (рис. 10), длины его сторон обозначим $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$. Тогда объем параллелепипеда есть $V=abc$, а по известным из условия задачи отношениям, в которых точки K, L, M делят соответствующие ребра, мы легко определяем длины частей этих ребер:

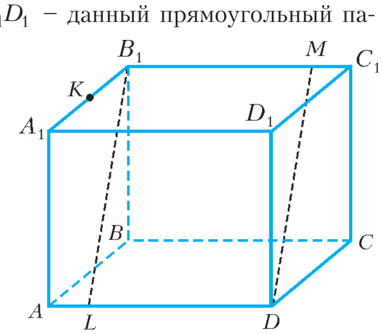


Рис. 10

$$A_1K=\frac{2}{5}a,\ KB_1=\frac{3}{5}a,\ B_1M=\frac{5}{7}b,$$

$$MC_1=\frac{2}{7}b,\ AL=\frac{2}{7}b,\ LD=\frac{5}{7}b.$$

Поскольку $AD\perp AA_1$ и $AD\perp AB$, то ребро AD перпендикулярно плоскости AA_1B_1. Но $B_1C_1\parallel AD$, значит, также перпендикулярно этой плоскости. Поэтому диагональное

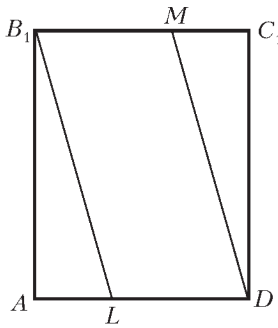


Рис. 11

сечение параллелепипеда AB_1C_1D представляет собой прямоугольник (рис.11). Основание пирамиды $LDMB_1$ лежит в этом прямоугольнике. При этом $LD \parallel B_1M$ и, как мы определили выше, $LD = B_1M$. Это означает, что $LDMB_1$ – параллелограмм, при этом B_1A – высота этого параллелограмма, так что площадь основания пирамиды есть

$$S = LD \cdot B_1A = \frac{5}{7} b \cdot \sqrt{a^2 + c^2} = \frac{5b\sqrt{a^2+c^2}}{7}.$$

В плоскости AA_1B_1 проведем $KN \perp AB_1$ (рис. 12). Докажем, что KN перпендикулярно плоскости диагонального сечения AB_1C_1D. В самом деле, B_1C_1 перпендикулярна плоскости AA_1B_1, поэтому $B_1C_1 \perp KN$. По построению $AB_1 \perp KN$, так что KN перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости диагонального сечения AB_1C_1D и потому перпендикулярна самой этой плоскости. Отсюда следует важный вывод: KN есть высота пирамиды $KLDMB_1$.

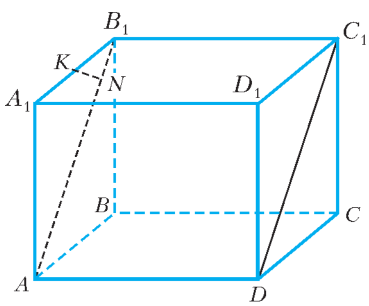


Рис. 12

Найти длину KN удобнее, рассмотрев треугольник AA_1B_1 на отдельном чертеже (рис.13). Треугольники KNB_1 и AA_1B_1 несомненно подобны. Из пропорции $\frac{KN}{AA_1} = \frac{KB_1}{AB_1}$ определяем, что

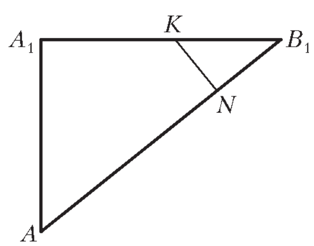


Рис. 13

$$KN = \frac{AA_1 \cdot KB_1}{AB_1} = \frac{c \cdot \frac{3}{5} a}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{3ac}{5\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Теперь находим объем пирамиды $KLDMB_1$:

$$V_1 = \frac{1}{3} S \cdot KN = \frac{1}{3} \cdot \frac{5b\sqrt{a^2+c^2}}{7} \cdot \frac{3ac}{5\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{abc}{7}.$$

Искомое в задаче отношение объемов есть $V/V_1 = 7$.

Комментарии. По сравнению с первой из стереометрических задач (B10) эта задача имеет значительно более высокий уровень сложности, поскольку здесь рассматривается комбинация многогранников: пирамида, «вписанная» в прямоугольный параллелепипед. Выпускнику потребуется проанализировать взаимное расположение фигур и установить, какой четырехугольник лежит в основании пирамиды и как удобно провести ее высоту. Если ответ на первый из поставленных вопросов для хорошо подготовленных выпускников не составит труда, то ответ на второй вопрос потребует хороших пространственных представлений и владения системой геометрических знаний для обоснования расположения высоты пирамиды.

Заметим, что хотя теоретические факты, необходимые для решения подобных задач, и не выходят за рамки школьного курса геометрии, но времени на обучение их решению, отводимого только программой по геометрии, явно недостаточно. По-видимому, именно с этим связаны низкие результаты выполнения задания C4 (менее 1% участников экзамена справились с заданием и только около 10% школьных отличников правильно его решили).

C5. Начнем с того, что было бы хорошо угадать какой-нибудь корень кубического уравнения, но подстановка в него первых целых отрицательных чисел (понятно, что положительных корней у уравнения нет) ни к чему не приводит.

Обратимся ко второму уравнению системы. Единственное, что мы можем сделать, – это найти ОДЗ из условия $\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x) \ge 0$, которое после преобразований приводится к виду $\frac{25x^3 - 5x^2 - 16x - 4}{x} \le 0$. Неравенство надо решать методом интервалов, для этого числитель необходимо разложить на множители. В отличие от первого уравнения системы, здесь корень угадывается практически сразу: $x = 1$. Далее удобнее всего разделить «уголком» $25x^3 - 5x^2 - 16x - 4$ на $(x-1)$. Тем, кто не умеет этого делать, лучше бы научиться, иначе придется выкручиваться, например, так:

$$25x^3 - 5x^2 - 16x - 4 = 25x^3 - 25x^2 + 20x^2 - 16x - 4 =$$
$$= 25x^2(x-1) + 4\left(5x^2 - 4x - 1\right) =$$
$$= 25x^2(x-1) + 4(x-1)(5x+1) =$$
$$= (x-1)\left(25x^2 + 20x + 1\right) = (x-1)(5x+2)^2.$$

Решением неравенства $\frac{(x-1)(5x+2)^2}{x} \le 0$ будут промежуток $x \in (0;1]$ и число $x = -\frac{2}{5}$. Похоже, что это число играет какую-то важную роль во всей задаче. Ничего не остается, кроме как попробовать подставить это число в первое уравнение системы:

$$15 \cdot \left(-\frac{8}{125}\right) + 36 \cdot \frac{4}{25} - 22 \cdot \frac{2}{5} + 4 = \frac{-24 + 144 - 220 + 100}{25} = 0.$$

Итак, $x = -\frac{2}{5}$ является корнем первого уравнения; теперь надо понять, есть ли у него другие корни. Для этого снова придется раскладывать на множители: $15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = \left(x + \frac{2}{5}\right) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен второй степени. Чтобы не возиться с дробными числами, удобнее, разделив все коэффициенты $Q(x)$ на 5, переписать предыдущее разложение в виде

$$15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = (5x+2) \cdot P(x),$$

где $P(x) = Q(x)/5$. Найти этот многочлен можно либо делением «уголком» левой части этого равенства на $(5x+2)$, либо разложением на множители. Снова продемонстрируем второй способ:

$$15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = 15x^3 + 6x^2 + 30x^2 + 22x + 4 =$$
$$= 3x^2(5x+2) + (6x+2)(5x+2) = (5x+2)\left(3x^2 + 6x + 2\right).$$

Входящий в это разложение квадратный трехчлен имеет корни $\frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$, оба эти числа отрицательны и не входят в ОДЗ. Получается, что $x = -\frac{2}{5}$ – единственное возможное значение неизвестной x в решении системы, но теперь необходимо проверить, удовлетворяет ли это число в паре с каким-нибудь значением неизвестной y второму уравнению системы. При $x=-\frac{2}{5}$ имеем

$$9\sin\frac{\pi}{x}=9\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)=-9,$$

$$\cos\left((5x+1)y\right)=\cos(-y)=\cos y,\ \frac{2}{x}-1=-6,$$

и второе уравнение превращается в $-9+\cos y=y(y-6)$, или $\cos y=(y-3)^2$. При $y\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$ правая часть этого равенства больше единицы, так что в этих промежутках решения не найти. Если же $y\in[2;4]$, то это значит, что аргумент косинуса лежит во второй или третьей четвертях, но не на вертикальном диаметре, т.е. в этом промежутке $\cos y<0$ и уравнение также не имеет решений. Итак, отсутствие решений у системы доказано.

Комментарии. Последняя задача варианта ЕГЭ – самая трудная. Она рассчитана на выпускников, имеющих высокий уровень математической подготовки и готовящихся к поступлению в те вузы, которые предъявляют самые высокие требования. Обычно с последней задачей справляется только небольшая часть тех выпускников, которые имеют школьную оценку «5» (около 5% отличников).

При ознакомлении с приведенными решениями задач высокого уровня сложности у читателя, очевидно, возникает желание получить дополнительную информацию о других типах задач, о характеристике методов их решения и т.п. Естественно, источником такой информации служат печатные издания о ЕГЭ. Для тех, кто хочет иметь реальную информацию о ЕГЭ, а не только авторское мнение какого-либо коллектива, советуем пособия, имеющие гриф Федерального института педагогических измерений (ФИПИ).

ЕГЭ по физике

М.ДЕМИДОВА, А.ЧЕРНОУЦАН

В 2008 году вступительный экзамен по физике, в отличие от математики и русского языка, может сдаваться как в форме ЕГЭ, так и в традиционной форме. Однако уже в 2009 году при поступлении в те вузы, где физика является одним из конкурсных предметов, должен быть обязательно представлен результат ЕГЭ. Это относится и к тем вузам, которые получат право проводить дополнительные испытания по физике. При этом ЕГЭ по физике остается экзаменом по выбору. Понятно, что его будут выбирать, в первую очередь, те выпускники, кто собирается заявить полученный результат в выбранный ими вуз. Ведь для успешного поступления в престижные вузы необходимо добиться более высоких результатов, чем для получения хорошей школьной оценки.

При подготовке к ЕГЭ необходимо решать разнообразные задачи разного уровня сложности, совмещая эту традиционную форму подготовки с изучением теории и регулярным выполнением тренировочных тестов. Отметим, что настоящее понимание теории приходит не при выучивании законов и формул и разборе тестовых вопросов (хотя это тоже необходимо), а при использовании этих законов и формул в достаточно сложных задачах. Единственной гарантией высокого результата может быть глубокое и заинтересованное изучение физики, решение нетривиальных задач, разбор каверзных вопросов и ситуаций.

Ниже мы приводим один из вариантов ЕГЭ 2007 года с кратким решением части задач. После этого мы обсудим типичные трудности, которые возникали у сдающих ЕГЭ по физике, и отметим новые элементы в ЕГЭ 2008 года.

Вариант 2007 года

Часть 1

А1. Тело упало с некоторой высоты с нулевой начальной скоростью и при ударе о землю имело скорость 40 м/с. Чему равно время падения? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1) 0,25 с; 2) 4 с; 3) 40 с; 4) 400 с.

А2. Точка движется с постоянной по модулю скоростью v по окружности радиусом R. Как изменится центростремительное ускорение точки, если ее скорость увеличить вдвое, а радиус окружности вдвое уменьшить?

1) Уменьшится в 2 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) увеличится в 4 раза; 4) увеличится в 8 раз.

А3. Четыре одинаковых кирпича массой m каждый сложены в стопку (рис.1). Если убрать верхний кирпич, то сила N, действующая со стороны горизонтальной опоры на 1-й кирпич, уменьшится на:

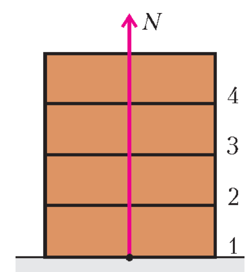


Рис. 1

1) $\frac{mg}{4}$; 2) $\frac{mg}{2}$; 3) mg; 4) $\frac{mg}{3}$.

А4. Под действием силы 3 Н пружина удлинилась на 4 см. Чему равен модуль силы, под действием которой удлинение этой пружины составит 6 см?

1) 3,5 Н; 2) 4 Н; 3) 4,5 Н; 4) 5 Н.

А5. Мальчик взвесил рыбу на самодельных весах с коромыслом из легкой рейки (рис.2). В качестве гири он использовал батон хлеба массой 1 кг. Масса рыбы равна:

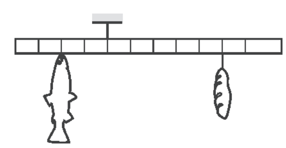


Рис. 2

1) 5 кг; 2) 2,5 кг; 3) 0,4 кг; 4) 1 кг.

А6. Первоначальное удлинение пружины равно Δl. Как изменится потенциальная энергия пружины, если ее удлинение станет вдвое больше?

1) Увеличится в 2 раза; 2) увеличится в 4 раза; 3) уменьшится в 2 раза; 4) уменьшится в 4 раза.

А7. Частота колебаний струны равна 500 Гц. Скорость звука в воздухе 340 м/с. Длина звуковой волны равна:

1) 68 м; 2) 340 м; 3) 170 м; 4) 0,68 м.

А8. На рисунке 3 приведен график зависимости скорости тела от времени при прямолинейном движении. Какой из графиков на рисунке 4 выражает зависимость модуля равнодействующей всех сил, действующих на тело, от времени движения? Систему отсчета считать инерциальной.

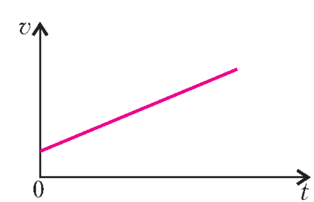


Рис. 3

А9. Доска массой 0,5 кг шарнирно подвешена к потолку на легком стержне (рис.5). На доску со скоростью 10 м/с налетает пластилиновый шарик массой 0,2 кг и прилипает к ней. Скорость шарика перед ударом направлена под углом 60° к нормали к доске.

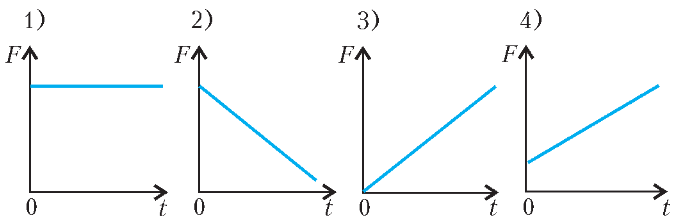


Рис. 4

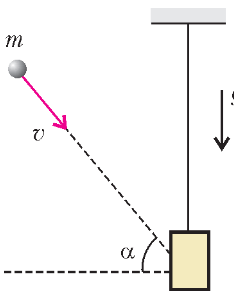


Рис. 5

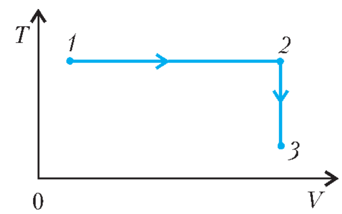


Рис. 6

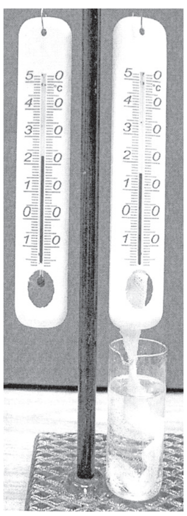


Рис. 7

Кинетическая энергия системы тел после соударения равна:

1) 0,7 Дж; 2) 1,0 Дж; 3) 2,9 Дж; 4) 10,0 Дж.

А10. Постоянная масса идеального газа участвует в процессе, показанном на рисунке 6. Наибольшее давление газа в процессе достигается:

1) в точке *1*; 2) на всем отрезке *1–2*; 3) в точке *3*; 4) на всем отрезке *2–3*.

А11. Как изменяется внутренняя энергия одноатомного идеального газа при изохорном увеличении его давления?

1) Уменьшается; 2) увеличивается; 3) увеличивается или уменьшается в зависимости от изменения объема; 4) не изменяется.

А12. На фотографии (рис.7) представлены два термометра, используемые для определения относительной влажности воздуха с помощью психрометрической таблицы, в которой влажность указана в процентах. Относительная влажность воздуха в помещении, в котором проводилась съемка, равна:

1) 37%; 2) 45%; 3) 48%; 4) 59%.

Психрометрическая таблица

Показания сухого термометра, °C	Разность показаний сухого и влажного термометров, °C								
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
	Относительность влажность, %								
15	100	90	80	71	61	52	44	36	27
16	100	90	81	71	62	54	45	37	30
17	100	90	81	72	64	55	47	39	32
18	100	91	82	73	64	56	48	41	34
19	100	91	82	74	65	58	50	43	35
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37
21	100	91	83	75	67	60	52	46	39
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40
23	100	92	84	76	69	61	55	48	42
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43
25	100	92	84	77	70	63	57	50	44

А13. При охлаждении твердого тела массой m температура тела понизилась на ΔT. Какое из приведенных ниже выражений определяет удельную теплоемкость вещества этого тела, если при этом охлаждении тело передало окружающим телам количество теплоты Q?

1) $\frac{Q\Delta T}{m}$; 2) $\frac{Q}{\Delta T}$; 3) $\frac{Q}{m\Delta T}$; 4) $Qm\Delta T$.

А14. На pT-диаграмме (рис.8) показан процесс изменения состояния идеального одноатомного газа неизменной массы. Газ совершает работу 5 кДж. Количество теплоты, полученное газом, равно:

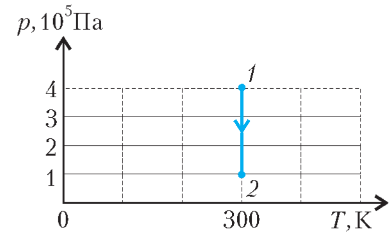


Рис. 8

1) 1 кДж; 2) 3 кДж; 3) 3,5 кДж; 4) 5 кДж.

А15. Тепловая машина имеет КПД 25 %. Средняя мощность передачи теплоты холодильнику в ходе ее работы составляет 3 кВт. Какое количество теплоты получает рабочее тело машины от нагревателя за 10 с?

1) 0,4 Дж; 2) 40 Дж; 3) 400 Дж; 4) 40 кДж.

А16. Как направлена кулоновская сила, действующая на точечный заряд $2q$, помещенный в центр квадрата, в вершинах которого находятся заряды: $+q$, $+q$, $-q$, $-q$ (рис.9)?

1) $\rightarrow$; 2) $\leftarrow$; 3) $\uparrow$; 4) $\downarrow$.

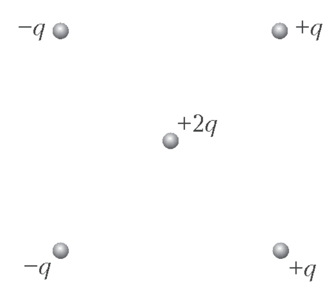


Рис. 9

А17. Как изменится электроемкость плоского воздушного конденсатора, если расстояние между его пластинами уменьшить в 2 раза?

1) Увеличится в 4 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) уменьшится в 2 раза; 4) уменьшится в 4 раза.

А18. Как изменится сила тока, протекающего через медный провод, если увеличить в 2 раза напряжение на его концах, а длину этого провода уменьшить в 2 раза?

1) Не изменится; 2) уменьшится в 2 раза; 3) увеличится в 2 раза; 4) увеличится в 4 раза.

А19. В электрической цепи, представленной на рисунке 10, тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе сопротивлением $R_1 = 20$ Ом, равна 2 кВт. Мощность, выделяющаяся на резисторе сопротивлением $R_2 = 30$ Ом, равна:

1) 1 кВт; 2) 2 кВт; 3) 3 кВт; 4) 4 кВт.

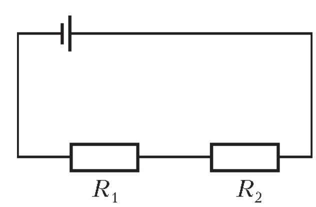


Рис. 10

А20. Сравните индуктивности L_1 и L_2 двух катушек, если при одинаковой силе тока энергия магнитного поля, создаваемого током в первой катушке, в 9 раз больше энергии магнитного поля, создаваемого током во второй катушке.

1) L_1 в 9 раз больше, чем L_2; 2) L_1 в 9 раз меньше, чем L_2; 3) L_1 в 3 раза больше, чем L_2; 4) L_1 в 3 раза меньше, чем L_2.

А21. На плоскую непрозрачную пластину с двумя узкими параллельными щелями падает по нормали плоская монохроматическая волна из зеленой части видимого спектра. За пластиной на параллельном ей экране наблюдается интерференционная картина. Если использовать монохроматический свет из красной части видимого спектра, то:

1) расстояние между интерференционными полосами уве-

личится; 2) расстояние между интерференционными полосами уменьшится; 3) расстояние между интерференционными полосами не изменится; 4) интерференционная картина повернется на 90°.

А22. Какой из образов 1–4 (рис.11) служит изображением предмета *AB* в тонкой линзе с фокусным расстоянием *F*?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

А23. Протон *p*, влетевший в зазор между полюсами электромагнита, имеет горизонтальную скорость $\vec{v}$, перпендикулярную вектору индукции $\vec{B}$ магнитного поля, направленного вертикально (рис.12). Куда направлена действующая на него сила Лоренца?

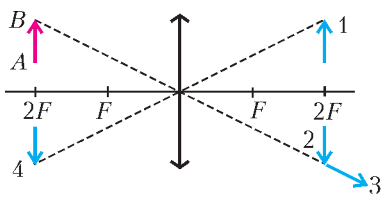


Рис. 11

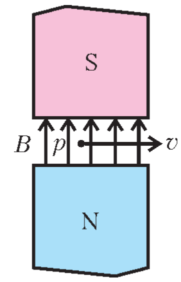


Рис. 12

1) Горизонтально к нам $\odot$; 2) горизонтально от нас $\otimes$; 3) вертикально вверх $\uparrow$; 4) вертикально вниз $\downarrow$.

А24. Синус предельного угла полного внутреннего отражения на границе стекло – воздух равен $\frac{8}{13}$. Какова скорость света в стекле?

1) $4{,}88\cdot10^8$ м/с; 2) $2{,}35\cdot10^8$ м/с; 3) $1{,}85\cdot10^8$ м/с; 4) $3{,}82\cdot10^8$ м/с.

А25. В некоторой инерциальной системе отсчета (ИСО) частица покоится. В любой другой ИСО она:

1) покоится; 2) движется прямолинейно; 3) движется с ускорением; 4) либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.

А26. На рисунке 13 приведены фрагмент спектра поглощения неизвестного разреженного атомарного газа (в середине), а также спектры поглощения атомов водорода (вверху) и гелия (внизу). В химический состав газа входят атомы:

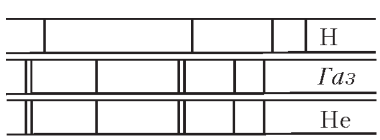


Рис. 13

1) только водорода; 2) только гелия; 3) водорода и гелия; 4) водорода, гелия и еще какого-то вещества.

А27. Какая доля от большого количества радиоактивных атомов остается нераспавшейся через интервал времени, равный двум периодам полураспада?

1) 25%; 2) 50%; 3) 75%; 4) 0%.

А28. Ядро $^{238}_{92}\mathrm{U}$ претерпело ряд α- и β-распадов. В результате образовалось ядро $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$. Определите число α-распадов.

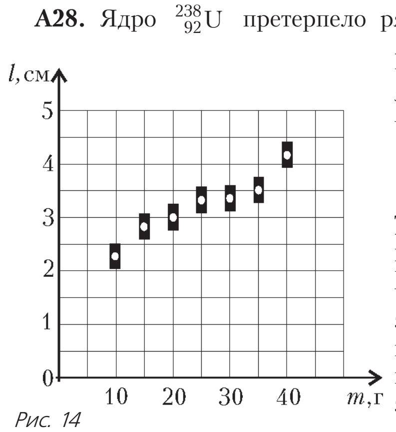


Рис. 14

1) 32; 2) 10; 3) 8; 4) 5.

А29. Работа выхода для материала пластины равна 2 эВ. Пластина освещается монохроматическим светом. Какова энергия фотонов падающего света, если максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов 1,5 эВ?

1) 0,5 эВ; 2) 1,5 эВ; 3) 2 эВ; 4) 3,5 эВ.

А30. На графике (рис.14) представлены результаты измерения длины пружины при различных значениях массы грузов, лежащих в чашке пружинных весов (рис.15). С учетом погрешностей измерений ($\Delta m = \pm1$ г, $\Delta l = \pm0{,}2$ см) жесткость пружины *k* приблизительно равна:

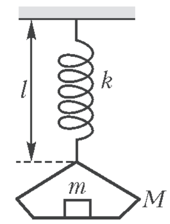


Рис. 15

1) 7 Н/м; 2) 10 Н/м; 3) 20 Н/м;4) 30 Н/м.

Часть 2

В1. Груз массой 2 кг, закрепленный на пружине жесткостью 200 Н/м, совершает гармонические колебания с амплитудой 10 см. Какова максимальная скорость груза?

В2. В баллоне находятся 20 кг азота при температуре 300 К и давлении 10^5 Па. Каков объем баллона? Ответ округлите до целых.

В3. Прямолинейный проводник длиной l = 0,2 м, по которому течет ток I = 2 А, находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,6 Тл и расположен параллельно вектору $\vec{B}$. Каков модуль силы, действующей на проводник со стороны магнитного поля?

В4. Плоская монохроматическая световая волна с длиной волны 400 нм падает по нормали на дифракционную решетку с периодом 5 мкм. Параллельно решетке позади нее размещена собирающая линза с фокусным расстоянием 20 см. Дифракционная картина наблюдается на экране в задней фокальной плоскости линзы. Найдите расстояние между ее главными максимумами 1-го и 2-го порядков. Ответ запишите в миллиметрах (мм), округлив до целых. Считать для малых углов φ ($\varphi \ll 1$ в радианах) $\mathrm{tg}\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi$.

Часть 3

С1. Наклонная плоскость пересекается с горизонтальной плоскостью по прямой *AB* (рис.16). Угол между плоскостями $\alpha = 30^\circ$. Маленькая шайба начинает движение вверх по наклонной плоскости из точки *A* с начальной скоростью $v_0 = 2$ м/с под углом $\beta = 60^\circ$ к прямой *AB*. В ходе движения шайба съезжает на прямую *AB* в точке *B*. Пренебрегая трением между шайбой и наклонной плоскостью, найдите расстояние *AB*.

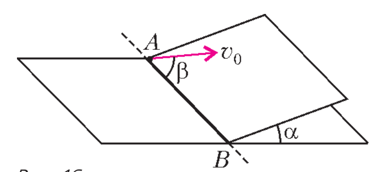


Рис. 16

С2. Один моль одноатомного идеального газа переходит из состояния *1* в состояние *3* (рис.17) в соответствии с графиком зависимости его объема *V* от температуры *T* (T_0 = 100 К). На участке *2–3* к газу подводят 2,5 кДж тепла. Найдите отношение полной работы газа A_{123} ко всему количеству подведенного к газу количества теплоты Q_{123}.

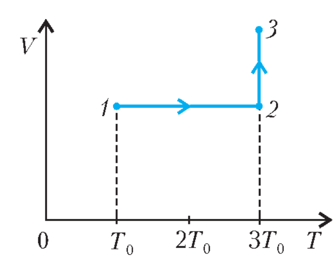


Рис. 17

С3. К источнику тока с ЭДС $\mathscr{E}$ = 9 В и внутренним сопротивлением r = 1 Ом подключили парал-

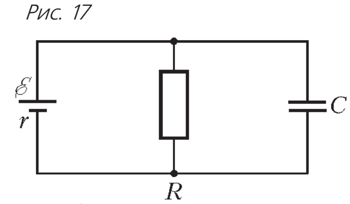


Рис. 18

(Продолжение см. на с. 34)

По порядку становись!

Множество M называют счетным, если его элементы можно пронумеровать натуральными числами – выписать в виде последовательности: $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Например, счетны множества целых чисел, простых чисел, квадратов:

$$\begin{array}{lllllllll} 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & 4, & \ldots; \\ 2, & 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & \ldots; \\ 0, & 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36, & 49, & \ldots \end{array}$$

Рисунок 1 показывает, что счетно множество $\mathbb{Z}^2$ точек плоскости с целыми координатами. На рисунке 2 показан другой способ нумерации: начинаем с точки $(0;\ 0)$, нумеруем точки, сумма модулей координат которых равна 1, затем те, для которых эта сумма равна 2, и так далее – по возрастанию суммы модулей абсциссы и ординаты. Способов бесконечно много; вряд ли можно выбрать из них «самый красивый», «самый правильный».

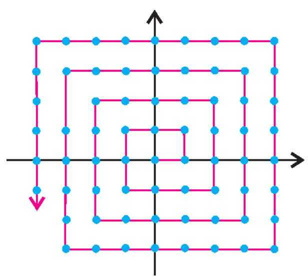


Рис. 1

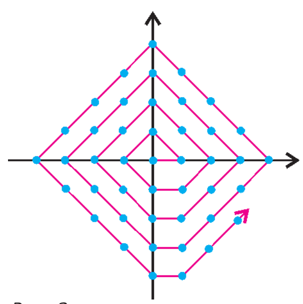


Рис. 2

Рисунок 3 доказывает счетность множества $\mathbb{N}^2$ точек плоскости с натуральными координатами. Выведем формулу для номера, которым эта нумерация снабжает точку $(x;\ y)$. Для этого заметим, что длины катетов закрашенного на рисунке 4 треугольника равны $x + y$; поэтому количество точек с натуральными координатами, расположенных внутри него, равно

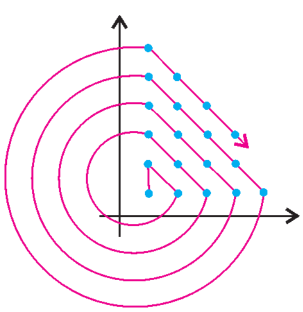


Рис. 3

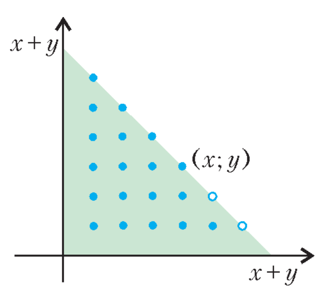


Рис. 4

$$1 + 2 + \ldots + (x + y - 2) = \frac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2},$$

а номер точки $(x;\ y)$ равен $\dfrac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2} + x$.

Множество $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ точек $(x;\ y)$, где x – натуральное число, а y – целое, тоже счетно (рис.5). Поскольку каждое рациональное число единственным образом представимо в виде дроби y/x, где $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$, $\text{НОД}(x;y) = 1$, то рисунок 6, отличающийся от рисунка 5 только тем, что

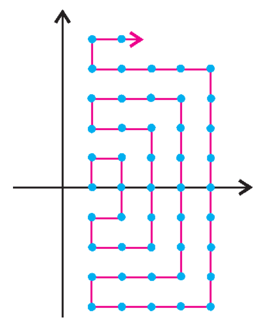


Рис. 5

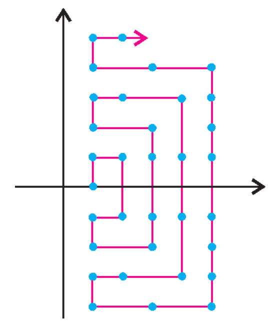


Рис. 6

пропущены точки $(x;\ y)$, у которых наибольший общий делитель чисел x и y больше 1, задает следующий способ нумерации рациональных чисел: 0, 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, -1, -2, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 2, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{2}$, -3, -4, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{3}$, 4, 5, $\frac{5}{2}$, …

Разумеется, этот способ не единственный, можно придумать много других, не менее естественных нумераций множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

В 2000 году Нейл Калкин и Герберт Вилф придумали изящную нумерацию множества положительных рациональных чисел. Построение начинаем с несократимой дроби $1/1$ (рис.7). Из каждого числа $x = a/b$ строим – тоже несократимые! – дроби $a/(a+b) = x/(1+x)$ («налево-вниз») и $(a+b)/b = x+1$ («направо-вниз»). Поскольку дробь $1/1$ несократима и поскольку из всякой несократимой дроби мы строим несократимые дроби, то все дроби дерева Калкина–Вилфа несократимы.

Узнать, где в дереве расположена та или иная дробь, нетрудно. Например, дробь $19/66$ меньше 1 и поэтому получена из дроби $19/47$, которая получена из $19/28$, которая, в свою очередь, получена из $19/9$. Поскольку $19 > 9$, то дробь $19/9$ получена из $10/9$ и так далее:

$$\frac{19}{66} \leftarrow \frac{19}{47} \leftarrow \frac{19}{28} \leftarrow \frac{19}{9} \leftarrow \frac{10}{9} \leftarrow \frac{1}{9} \leftarrow \frac{1}{8} \leftarrow \frac{1}{7} \leftarrow \frac{1}{6} \leftarrow$$

$$\leftarrow \frac{1}{5} \leftarrow \frac{1}{4} \leftarrow \frac{1}{3} \leftarrow \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{1}.$$

Таким образом, индукцией по величине $m + n$ легко доказать, что каждая положительная несократимая дробь m/n встречается в дереве Калкина–Вилфа ровно один раз.

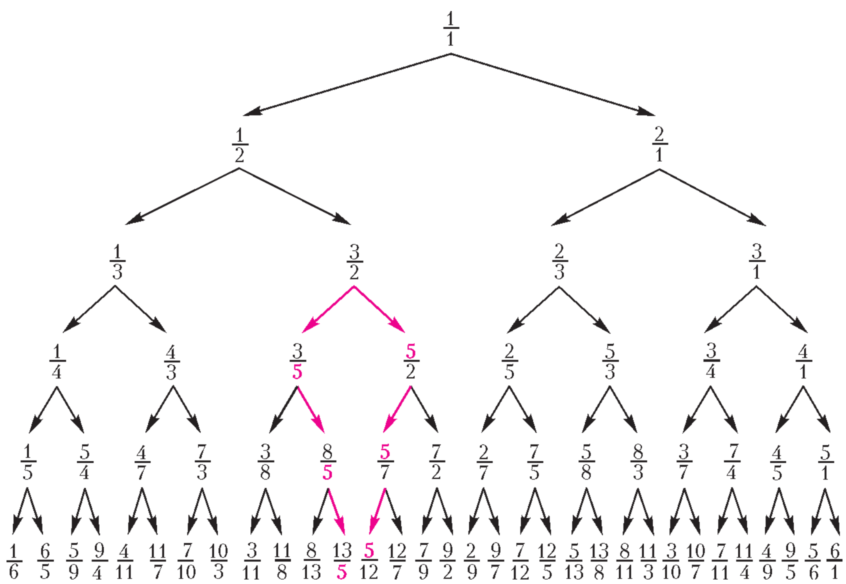


Рис. 7

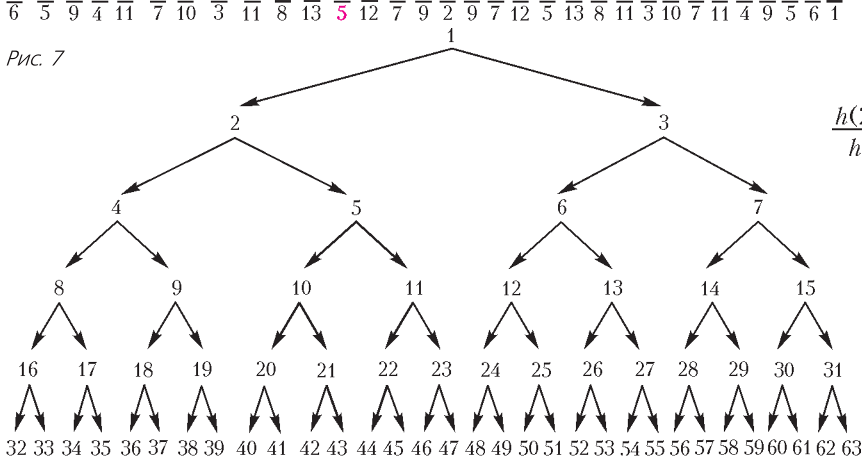


Рис. 8

Начиная с самого верха, спускаясь с этажа на этаж и двигаясь по каждому этажу слева направо, получаем нумерацию Калкина–Вилфа:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{2},\frac{2}{5},\frac{5}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{1},\frac{1}{5},\frac{5}{4},\frac{4}{7},\frac{7}{3},\ldots$$

Знаменатель каждой дроби является числителем следующей за ней дроби. (При переходе с этажа на следующий это очевидно верно: $1 = 1$. При движении по горизонтали доказательство чуть сложнее. Идея в том, что красный на рисунке 7 знаменатель дроби $13/5$ совпадает со знаменателями дробей $8/5$ и $3/5$. Число 5 равно сумме числителя и знаменателя дроби $3/2$. Эта же сумма равна числителям дробей $5/2$, $5/7$ и $5/12$.) Поэтому существует последовательность h такая, что n-я дробь нумерации Калкина–Вилфа равна $\dfrac{h(n-1)}{h(n)}$. Вот первые 20 членов:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h(n)$	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$h(n)$	2	5	3	4	1	5	4	7	3

Рисунок 8 отличается от рисунка 7 тем, что вместо дробей указаны их номера. Как видите, каждое натуральное число n «раздваивается» в числа $2n$ и $2n+1$. При этом дробь $\dfrac{h(n-1)}{h(n)}$ «раздваивается» в дроби $\dfrac{h(n-1)}{h(n-1)+h(n)}$ и $\dfrac{h(n-1)+h(n)}{h(n)}$ (рис.9). Значит, выполнены следующие рекуррентные соотношения:

$$h(2n-1) = h(n-1),$$
$$h(2n) = h(n-1) + h(n),$$
$$h(2n+1) = h(n).$$

(Третье соотношение получается из пер-

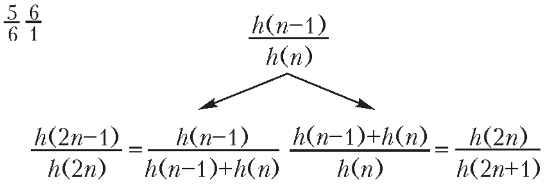


Рис. 9

вого увеличением n на единицу, так что по сути соотношений два, а не три.) Последовательность h изучил Морис Абрахам Штерн в 1858 году. Оказывается, $h(n)$ – количество способов разложить число n в сумму (быть может, состоящую из одного слагаемого или даже – в случае $n = 0$ – состоящую из нуля слагаемых) степеней двойки, где ни одно слагаемое не присутствует более чем дважды. Например,

$$18 = 2 + 16 = 2 + 8 + 8 = 2 + 4 + 4 + 8 =$$
$$= 1 + 1 + 16 = 1 + 1 + 8 + 8 = 1 + 1 + 4 + 4 + 8 =$$
$$= 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 8,$$

так что $h(18) = 7$. А вот объяснение равенства $h(19) = 3$:

$$19 = 1 + 2 + 16 = 1 + 2 + 8 + 8 = 1 + 2 + 4 + 4 + 8.$$

Моше Ньюман изучил функцию

$$f(x) = \frac{1}{x + 1 - 2\{x\}}$$

и последовательность 1, $f(1) = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$, $f(2) = \dfrac{1}{3}$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$, ..., каждый очередной член которой получается из предыдущего применением функции f. А это и есть уже рассмотренная выше последовательность Калкина–Вилфа. Попробуйте обосновать это самостоятельно.

При подготовке «Калейдоскопа» использованы материалы главы XVII книги М.Айгнера и Г.Циглера «Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней» (М.: Мир, 2006).

Е.Пронина

(Начало см. на с. 29)

лельно соединенные резистор сопротивлением R = 8 Ом и плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого d = 0,002 м (рис.18). Какова напряженность электрического поля между пластинами конденсатора?

C4. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC площадью $50\,\text{см}^2$ расположен перед тонкой собирающей линзой так, что его катет AC лежит на главной оптической оси линзы (рис.19). Фокусное расстояние линзы 50 см. Вершина прямого угла C находится ближе к центру линзы, чем вершина острого угла A. Расстояние от центра линзы до точки C равно удвоенному фокусному расстоянию линзы. Постройте изображение треугольника и найдите площадь получившейся фигуры.

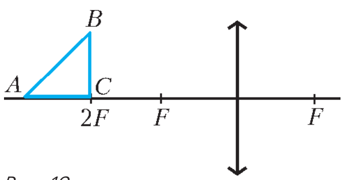


Рис. 19

C5. Предположим, что схема энергетических уровней атомов некоего вещества имеет вид, показанный на рисунке 20, и атомы находятся в состоянии с энергией $E^{(1)}$. Электрон, движущийся с кинетической энергией 1,5 эВ, столкнулся с одним из таких атомов и отскочил, приобретя некоторую дополнительную энергию. Определите импульс электрона после столкновения, считая, что до столкновения атом покоился. Возможностью испускания света атомом при столкновении с электроном пренебречь.

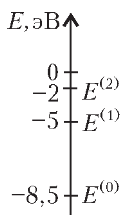


Рис. 20

C6. На рисунке 21 показана схема устройства для предварительного отбора заряженных частиц для последующего детального исследования. Устройство представляет собой конденсатор, пластины которого изогнуты

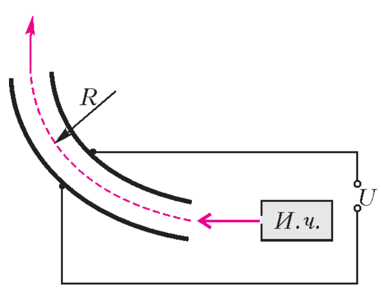


Рис. 21

дугой радиусом $R \approx 50\,\text{см}$. Предположим, что в промежуток между обкладками конденсатора из источника заряженных частиц (*И.ч.*) влетает электрон, как показано на рисунке. Напряженность электрического поля в конденсаторе по модулю равна 500 В/м. При каком значении скорости электрон пролетит сквозь конденсатор, не коснувшись его пластин? Считать, что расстояние между обкладками конденсатора мало, напряженность электрического поля в конденсаторе всюду одинакова по модулю, а вне конденсатора электрическое поле отсутствует. Влиянием силы тяжести пренебречь.

Ответы к вопросам Части 1

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15
2	4	3	3	2	2	4	1	1	1	2	3	3	4	4

A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27	A28	A29	A30
2	2	4	3	1	1	2	1	3	4	2	1	3	4	3

Ответы к задачам Части 2

B1	B2	B3	B4
1	18	0	16

Краткие решения, указания и комментарии

A9. Скорость системы после удара найдем из закона сохранения импульса в проекции на ось, перпендикулярную стержню: $mv\cos\alpha = (m+M)u$.

A10. Многих сбивает нетрадиционное расположение осей по горизонтали и вертикали.

B4. $d\sin\alpha_m = m\lambda$, $x_m = F\,\text{tg}\,\alpha_m \approx F\sin\alpha_m = Fm\lambda/d$, $x_2 - x_1 = F\lambda/d = 16\,\text{мм}$.

C1. Запишем второй закон Ньютона в проекции на наклонную плоскость:

$$mg\sin\alpha = ma .$$

Ускорение a равно $g\sin\alpha$ и направлено вниз вдоль плоскости. Направим ось X вдоль AB, а ось Y – вверх вдоль плоскости. Движение по плоскости аналогично движению тела, брошенного под углом β к горизонту, с заменой $g \to g\sin\alpha$. Получаем

$$AB = \frac{v_0^2\sin 2\beta}{g\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\,\text{м} .$$

C2. Поскольку $A_{12} = 0$ и $\Delta U_{23} = 0$, то $A_{123} = A_{23} = Q_{23}$. Далее,

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(3T_0 - T_0) = 3\nu RT_0, \quad Q_{123} = 3\nu RT_0 + Q_{23} .$$

Окончательно,

$$\frac{A_{123}}{Q_{123}} = \frac{Q_{23}}{3\nu RT_0 + Q_{23}} \approx 0{,}5 .$$

C3. $U_C = U_R = \dfrac{\mathcal{E}}{r+R}R$, $E = \dfrac{U_C}{d} = \dfrac{\mathcal{E}R}{d(r+R)} = 4\,\text{кВ/м}$.

C4. При решении этой задачи большие трудности возникли при построении изображения точки A с помощью побочной оптической оси. Однако, как видно из рисунка 22, достаточно с помощью традиционных опорных лучей построить изображение B' точки B, после чего определяется ход луча AB и положение точки C'. Длину горизонтального катета $A'C'$ найдем с помощью формулы линзы:

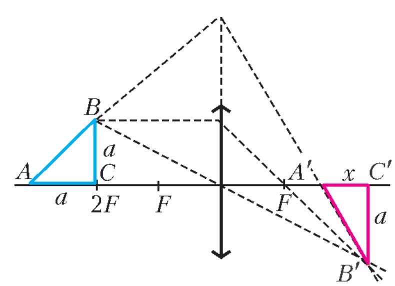


Рис. 22

$$\frac{1}{2F+a} + \frac{1}{2F-x} = \frac{1}{F}, \quad x = \frac{aF}{F+a}, \text{ где } a = \sqrt{2S} .$$

Поскольку точка C' находится на расстоянии $2F$ от линзы, то $C'B' = CB = a$. Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2}A'C' \cdot B'C' = \frac{a^2}{2}\frac{F}{F+a} = S\frac{F}{F+\sqrt{2S}} = \frac{5}{6}S \approx 41{,}7\,\text{см}^2 .$$

C5. Энергией отдачи атома можно пренебречь, поэтому энергия электрона после столкновения равна $E = 1{,}5\,\text{эВ} + 3{,}5\,\text{эВ} = 5\,\text{эВ} = 8\cdot10^{-19}$ Дж. Импульс электрона равен $p = \sqrt{2mE} \approx 1{,}2\cdot10^{-24}\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$.

C6. Второй закон Ньютона в проекции на радиальное направление имеет вид

$$qE = m\frac{v^2}{R}, \text{ откуда } v = \sqrt{RE\frac{q}{m}} \approx 6{,}6\cdot10^6\,\text{м/с} .$$

Проблемы, возникающие при решении задач ЕГЭ по физике

В контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по физике все простые вопросы (или, как их называют, задания базового уровня) находятся в первой части работы. Они, как правило, для подготовленных учащихся не представляют особых затруднений. Самыми «привлекательными» являются всевозможные вопросы на проверку знания различных формул и законов с использованием простейших расчетов, например такие, как задания А1, А4, А6, А7, А19 и т.п. в приведенном выше варианте экзаменационного теста.

При выборе ответа имеет смысл проверять полученный результат на соответствие здравому смыслу. В серии заданий (например, А24) один или два из ответов (ответы 1, 4) были «запрограммированы» на какую-либо ошибку в расчетах, но при этом заведомо не имели смысла, и их можно было просто отбросить. Однако, как показывает опыт, эти ответы выбирают больше трети учащихся.

Гораздо хуже обстоит дело с вопросами качественного характера. Причем здесь результаты ниже ожидаемых как для совсем элементарных вопросов, так и для более сложных. Например, с заданием А3 в рассмотренном варианте справились чуть более половины школьников.

Наиболее проблемными оказываются вопросы на понимание особенностей тех или иных явлений. Так, в приведенном ниже примере 1 более трети учащихся выбирают четвертый ответ, не понимая, что речь идет о диэлектриках, а не о проводниках.

Пример 1. Два стеклянных кубика *1* и *2* сблизили вплотную и поместили в электрическое поле отрицательно заряженного шара, как показано в верхней части рисунка 23. Затем кубики раздвинули и уже потом убрали заряженный шар (нижняя часть рисунка). Какое утверждение о знаках зарядов разделенных кубиков *1* и *2* правильно?

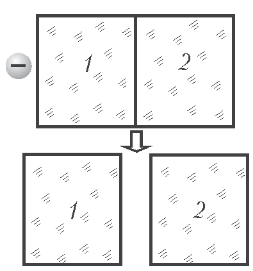


Рис. 23

1) Заряды первого и второго кубиков положительны; 2) заряды первого и второго кубиков отрицательны ; 3) заряды первого и второго кубиков равны нулю; 4) заряд первого кубика положителен, второго – отрицателен.

Как правило, в каждом варианте ЕГЭ по физике есть 4–6 заданий, в которых используются различные графики. В большинстве случаев нужно просто правильно извлечь информацию из предложенного графика (как в задании А14) или выбрать верный график для той или иной зависимости физических величин (как в задании А8). Однако нередко с анализом графических зависимостей успешно справляется лишь группа сильных выпускников (как в задании А10).

Ежегодно задолго перед проведением ЕГЭ публикуются демонстрационный вариант и так называемая спецификация экзаменационной работы. В этом документе, в частности, указывается, на каких местах будут располагаться задания повышенного и высокого уровней сложности. При подготовке к экзамену имеет смысл обратить на это внимание, чтобы не посчитать слишком простым задание, которое таковым не является. Так, в прошлом году в одной из серий вариантов использовались задания, аналогичные приведенному ниже примеру 2.

Пример 2. В опытах по фотоэффекту взяли пластину из металла с работой выхода $3,4\cdot10^{-19}$ Дж и стали освещать ее светом частотой $3\cdot10^{14}$ Гц. Затем частоту увеличили в 2 раза, оставив неизменным число фотонов, падающих на пластину за 1 с. В результате этого число фотоэлектронов, покидающих пластину за 1 с:

1) не изменилось; 2) стало не равным нулю; 3) увеличилось в 2 раза; 4) увеличилось менее чем в 2 раза.

По спецификации это задание повышенного уровня. Однако большинство выпускников не обратили внимания на то, что энергия первоначальных фотонов меньше работы выхода.

Существенную часть экзаменационной работы составляет решение задач по всем темам школьного курса физики и различного уровня сложности. Обычно задачи повышенного уровня второй части работы (В1–В4) особый затруднений не вызывают. Наиболее сложные задачи даются в третьей части работы, хотя и здесь включены как типовые задачи, встречающиеся в традиционных школьных задачниках (например, С2 или С3), так и оригинальные (например, С1, С5 и С6). При решении типовых задач выпускников не пугает обилие необходимых уравнений и сложности математических преобразований. К этой части работы приступает лишь сильная группа учащихся, имеющих, как правило, хорошую математическую подготовку. Проблемы возникают исключительно по физике. Оригинальные задачи, как правило, решаются «в одну формулу», но для этого необходимо самостоятельно предложить физическую модель, поскольку в тексте в явном виде ее описание отсутствует (например, С6). Объективная сложность новизны ситуации существенно влияет на результаты выполнения, которые для этих задач колеблются в пределах 4–8%.

Новое в ЕГЭ 2008 года

Главные изменения в структуре вариантов 2008 года состоят в следующем. Вместо 6 задач в группе С будет 5 задач, каждая из которых оценивается от 0 до 3 баллов. Группа В будет содержать 3 традиционные задачи на получение численного ответа (каждая из которых оценивается в 1 балл) и одного тестового вопроса с выбором трех правильных ответов на три вопроса (оценивается от 0 до 2 баллов). Приведем пример такого вопроса.

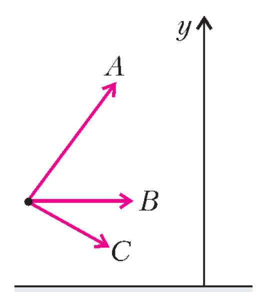


Рис. 24

Пример 3. Тело трижды бросают с некоторой высоты над поверхностью земли в разных направлениях (рис.24). Для каждого направления

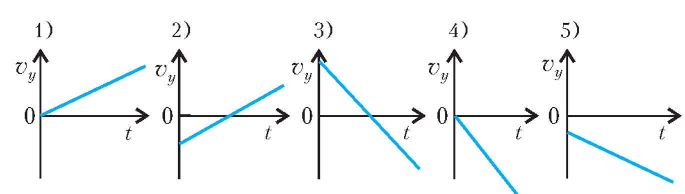


Рис. 25

броска *A*, *B*, *C* подберите правильную зависимость проекции скорости на ось y от времени t (рис.25).

Ответ:

A	*B*	*C*
3	4	5

Материалы вступительных экзаменов 2007 года

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Трактор выехал со станции к деревне на 30 минут раньше грузовика. Когда грузовик, обогнав трактор, приехал в деревню, трактору осталось ехать до деревни 3 км. Найдите скорости трактора и грузовика, если известно, что скорость грузовика на 20 км/ч больше скорости трактора, а расстояние от станции до деревни равно 12 км.

2. Решите неравенство

$$2\log_{\frac{\sqrt{19}-2}{2}}\left(\frac{1}{3x-2}\right)+\log_{\frac{\sqrt{19}-2}{2}}(5-2x)\geq 0\,.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1-\sin x\sin 3x}{2}}=\sin\frac{\pi-4x}{2}\,.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{\left|x^2-6x+5\right|-\left|x^2-2x-3\right|}\leq 0\,.$$

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и равна 9, $CD = 12$, а отрезок AO, где O – точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найдите угол AOB.

6. Считая x, y целыми числами, решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_4\left(\sqrt{y}+1\right)\cdot\log_{(y-2)^2}(x+1)+\log_{\frac{1}{(y-2)^2}}3=0,\\ 4^{x+y}-256\cdot 2^{x+y}+16384=0.\end{cases}$$

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Вычислите $\sin\left(\operatorname{arctg}(-3)\right)$.

2. Решите неравенство

$$\log_x 3\cdot\log_9\left(\frac{5-12x}{12x-8}\right)\leq\frac{1}{2}\,.$$

3. Решите уравнение

$$3\cos^4 x+6\sin^4 x-5\sin^2 x+\cos^2 x=1\,.$$

4. Имеются три бутыли раствора спирта различной концентрации. При смешивании 3 литров из первой бутыли, 5 литров из второй и 7 литров из третьей бутыли получается 6%-й раствор. При смешивании 1 литра из первой бутыли, 3 литров из второй и 4 литров из третьей получается 5%-й раствор спирта. Какова концентрация раствора, полученного при смешивании 3 литров из первой бутыли, 1 литра из второй и 2 литров из третьей бутыли?

5. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K. Найдите площадь треугольника CKB, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R и угол ABC равен β.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$$

имеет единственное решение x_0, которое удовлетворяет условиям $0<x_0<3$?

Вариант 3

(олимпиада-2007, все факультеты)

1. Упростите выражение

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}\,.$$

(2 балла)

2. В судне возникла течь, и один из отсеков судна был затоплен. Команда из 10 матросов откачает воду из отсека за 6 часов, команда из 14 матросов – за 4 часа. За сколько часов откачают воду 18 матросов? (3 балла)

3. Докажите, что при пересечении выпуклого четырехугольника и выпуклого пятиугольника не может получиться десятиугольник. (3 балла)

4. Найдите все корни уравнения $\left|\sin(2x-1)\right|=\cos x$, удовлетворяющие условию $-\pi\leq x\leq\pi$. (4 балла)

5. Хорда DB длины a окружности радиуса R продолжена за точку B до точки E так, что $BE = 2a$. Диаметр AB продолжен за точку B до точки C так, что $BC = R$. Найдите периметр четырехугольника $ADCE$. (4 балла)

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}4^{x+y-1}+3\cdot 4^{2y-1}\leq 2,\\ x+3y\geq 2-\log_4 3.\end{cases}$$

(5 баллов)

7. Докажите, что для любого натурального числа n число $n^2+5n+53$ не может делиться на 121. (5 баллов)

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Какую скорость v должен иметь вагон поезда, равномерно движущегося по закруглению горизонтальной дороги, чтобы шар, подвешенный на нити к потолку вагона, отклонился от вертикали на угол $\alpha = 45°$ (рис.1)? Шар вместе с вагоном движется по дуге окружности радиусом R = 100 м. При расчетах принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

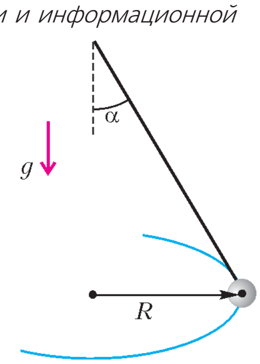


Рис. 1

2. Вагон массой $m_1 = 30$ т движется по гладким рельсам со скоростью $v_1 = 0{,}8$ м/с и сталкивается с вагоном массой $m_2 = 10$ т, движущимся ему навстречу с такой же скоростью. В результате столкновения произошла сцепка, и вагоны стали двигаться как единое целое. Найдите величину скорости вагонов v после столкновения.

3. Плоский воздушный конденсатор зарядили от источника тока и отключили от него. Как и во сколько раз изменится разность потенциалов на обкладках конденсатора, если увеличить расстояние между обкладками вдвое и заполнить конденсатор диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3$?

4. Одноатомный идеальный газ, изобарически расширяясь, совершил работу $A = 4620$ Дж. Найдите приращение его внутренней энергии ΔU.

5. В однородном магнитном поле находится плоская рамка площадью $S = 0{,}001$ м^2, состоящая из $N = 5$ витков тонкой проволоки общим сопротивлением $R = 10$ Ом, концы которой замкнуты накоротко. Плоскость рамки перпендикулярна линиям поля. Магнитная индукция убывает с постоянной скоростью $\Delta B/\Delta t = 0{,}01$ Тл/с. Найдите силу тока I в рамке.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Два спутника движутся вокруг Земли по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, со скоростями $v_1 = 7{,}8$ км/с и $v_2 = 7{,}6$ км/с. Пользуясь только данными, приведенными в условии задачи, определите минимальное возможное расстояние l между спутниками во время их движения. Радиус Земли принять равным $R_З = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2.

2. При выстреле из пушки, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности, вылетает снаряд под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. За счет отдачи пушка откатывается назад со скоростью $v = 2$ м/с. Масса пушки без снаряда $M = 500$ кг. Найдите величину импульса p системы, состоящей из пушки и снаряда, сразу после выстрела.

3. Электрон через отверстие в обкладке влетает внутрь плоского конденсатора и, двигаясь вдоль линии напряженности электрического поля, полностью теряет свою скорость, пройдя путь $l = 0{,}016$ м. На каком расстоянии x от обкладки электрон потеряет скорость, если его начальную скорость уменьшить в $n = 2$ раза, а разность потенциалов обкладок конденсатора увеличить в такое же число раз? Действием силы тяжести пренебречь.

4. В калориметре смешивают жидкость при температуре $t_1 = 20$ °С с жидкостью при температуре $t_2 = 80$ °С с вдвое большей массой. Удельные теплоемкости жидкостей одинаковы. Найдите температуру смеси t.

5. Тонкий стержень длиной $L = 70$ см согнули под прямым углом и положили на горизонтальную поверхность. Длина одной из частей стержня, образующих прямой угол, $L_1 = 30$ см. В пространстве имеется однородное вертикальное магнитное поле с индукцией $B = 4$ мТл. Найдите величину результирующей силы Ампера F, которая подействует на стержень, если по нему пропустить ток $I = 10$ А.

Вариант 3

(олимпиада-2007, все факультеты)

1. По направлению к бегущей прямолинейно с постоянной скоростью $v_л = 45$ км/ч лисе бежит собака. Скорость собаки все время направлена на лису и равна $v_с = 55$ км/ч. В некоторый момент времени оказалось, что вектор скорости собаки образует угол $\alpha = 45°$ с прямой, вдоль которой движется лиса, а расстояние между собакой и лисой равно $L = 150$ м. Найдите ускорение собаки в этот момент времени. (5 баллов)

2. Через невесомый блок с неподвижной горизонтальной осью перекинута легкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 300$ г и $m_2 = 200$ г. С каким ускорением движутся грузы? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Трением в оси блока пренебречь. (3 балла)

3. В цилиндрическом сосуде с водой, стенки которого вертикальны, плавает деревянная дощечка. Если на нее сверху положить стеклянную пластинку, то дощечка с пластинкой останутся на плаву, но уровень воды в сосуде поднимется на $\Delta h = 20$ мм. На какую величину Δh_1 изменится уровень воды в сосуде с плавающей дощечкой, если ту же стеклянную пластинку не класть на дощечку, а бросить на дно сосуда? Плотность стекла $\rho_с = 2$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3. (4 балла)

4. Массивное тело, двигаясь со скоростью $3v$ по горизонтальной поверхности, абсолютно упруго сталкивается с шаром, движущимся со скоростью v в ту же сторону (рис.2). Масса шара m много меньше массы тела. На какую величину ΔE изменится кинетическая энергия шара в результате удара? Трением пренебречь. (3 балла)

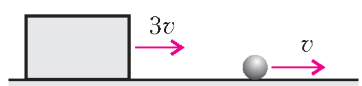


Рис. 2

5. Небольшой сосуд, стенки которого не проводят тепло, откачан до глубокого вакуума и находится в атмосфере идеального одноатомного газа, имеющего температуру T_0. В некоторый момент времени в сосуде открывают кран и происходит заполнение сосуда газом. Какую температуру T будет иметь газ в сосуде сразу после его заполнения? (4 балла)

6. На рисунке 3 изображена электрическая цепь, состоящая из шести одинаковых звеньев. Все сопротивления одинаковые. На входные клеммы подано постоянное напряжение. В первое и последнее звенья цепи включены идеальные амперметры А и $А_0$, при этом амперметр А показывает ток $I = 8{,}9$ А. Какой ток I_0 показывает амперметр $А_0$? (5 баллов)

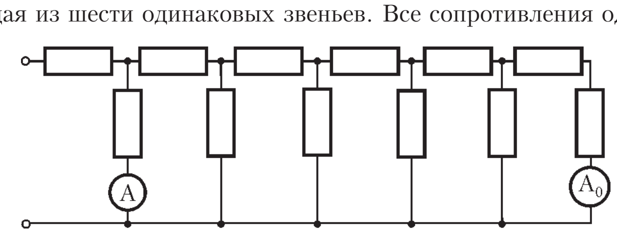


Рис. 3

7. Горизонтальные рельсы находятся на расстоянии $l = 0{,}3$ м друг от друга. На них лежит стержень, перпендикулярный рельсам. Какой должна быть индукция B однородного вертикального магнитного поля, чтобы стержень начал двигаться при пропускании по нему тока силой $I = 50$ А? Коэффициент трения стержня о рельсы $\mu = 0{,}2$. Масса стержня $m = 0{,}5$ кг. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. (3 балла)

8. В отверстие радиусом $R = 1{,}5$ см в тонкой непрозрачной перегородке вставлена тонкая собирающая линза. Точечный источник света расположен на главной оптической оси линзы по одну сторону перегородки. По другую сторону перегородки находится экран. Экран, вначале соприкасавшийся с линзой, отодвигают от линзы. При этом радиус светлого пятна на экране плавно (монотонно) увеличивается и на расстоянии $L = 18$ см от перегородки достигает значения $r_1 = 3$ см. Если линзу убрать, оставив экран на месте, то радиус пятна на экране станет $r_2 = 4{,}5$ см. Определите фокусное расстояние F линзы. (4 балла)

Публикацию подготовили А.Леденев, А.Пичкур

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Тело, двигаясь прямолинейно и равнозамедленно, прошло за два одинаковых последовательных промежутка времени $\tau = 2$ с пути $s_1 = 26$ м и $s_2 = 10$ м. Определите величину a ускорения тела.

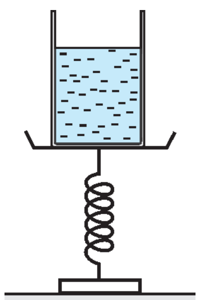


Рис. 1

2. На столе стоят пружинные весы, на весах – цилиндрический сосуд с водой (рис.1). Когда в сосуд долили некоторое количество воды, свободная поверхность воды в сосуде осталась относительно стола на прежнем уровне. Определите жесткость k пружинных весов. Внутренний радиус сосуда $r = 8$ см.

3. Вокруг горизонтальной оси O может вращаться легкий жесткий стержень, на котором на одинаковых расстояниях $l = 40$ см от оси закреплены небольшие грузы с массами m и M (рис.2; ось O перпендикулярна плоскости рисунка). Первоначально стержень удерживали в горизонтальном положении, а затем без толчка отпустили. Найдите максимальную скорость v грузов, если отношение их масс $M/m = 3$. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

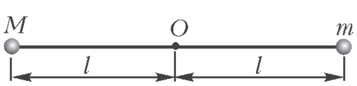


Рис. 2

4. Во сколько раз отличаются средние квадратичные скорости молекул водорода и кислорода в воздухе нашей аудитории?

5. Какое количество теплоты Q нужно сообщить в изобарном процессе одноатомному идеальному газу, чтобы увеличить его объем в $n = 2$ раза? В исходном состоянии объем и давление газа равны $V = 0{,}1$ м^3 и $p = 100$ кПа.

6. Конденсатор, заряд которого $q = 50$ нКл, подключили к источнику напряжением $U = 100$ В. В результате энергия конденсатора увеличилась в $n = 4$ раза. Определите емкость C конденсатора.

7. При работе утюга вилка электрического шнура из-за плохого контакта с розеткой немного нагревается. Определите сопротивление r контакта «вилка-розетка», считая, что мощность выделения тепла в контакте $P_к = 2$ Вт, напряжение на спирали утюга $U = 220$ В, мощность спирали $P = 660$ Вт.

8. Тонкий металлический стержень подвешен в однородном магнитном поле на двух гибких проводниках, подключенных к источнику постоянного напряжения. Сначала стержень удерживали так, что вектор индукции магнитного поля составлял угол $\alpha = 60°$ со стержнем, а затем стержень установили перпендикулярно вектору индукции. Во сколько раз изменилась при этом сила Ампера, действующая на стержень со стороны магнитного поля?

9. Наблюдатель ростом $h = 170$ см, находясь на расстоянии $L = 20$ м от дерева, видит его верхушку в маленьком зеркале, расположенном горизонтально на земле на расстоянии $l = 2$ м от его ног. Определите высоту H дерева.

10. Работа выхода электронов из алюминия равна $A_1 = 3{,}74$ эВ, а из цезия – $A_2 = 1{,}89$ эВ. Во сколько раз отличаются длины волн, соответствующие красным границам фотоэффекта для этих металлов?

Физические постоянные

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2

Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3

Молярная масса водорода $M_в = 2$ г/моль

Молярная масса кислорода $M_к = 32$ г/моль

Вариант 2

(олимпиада-2007)

1. С какой горизонтальной скоростью v_0 нужно бросить камень с вершины горы, склон которой образует угол α с горизонтом, чтобы он упал на склон горы на расстоянии L от вершины? Ускорение свободного падения g. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска (рис.3). На доску опирается свободный конец тонкой однородной балки, шарнирно закрепленной под углом α к вертикали. Какую горизонтальную силу F нужно приложить к доске, чтобы медленно затягивать ее под балку с постоянной скоростью? Масса балки m, коэффициент трения между балкой и доской μ, ускорение свободного падения g.

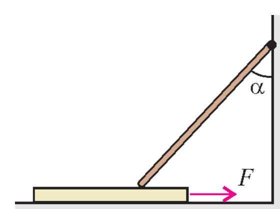


Рис. 3

3. Тело массой $m = 1$ кг бросили под углом к горизонту. На высоте $h = 10$ м его кинетическая энергия оказалась равной $E_к = 100$ Дж. Какой была величина v_0 начальной скорости тела? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Найдите плотность ρ водорода в сосуде объемом $V = 40$ л, если число его молекул в сосуде вдвое больше числа Авогадро N_A. Молярная масса водорода $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

5. Идеальный газ переводят из состояния *1* в состояние *2* в процессе, график которого изображен на рисунке 4. Считая известными давление p_1 и объемы V_1, V_2, V_3, определите давление p_2, при котором работа, совершенная газом в данном процессе, равна нулю.

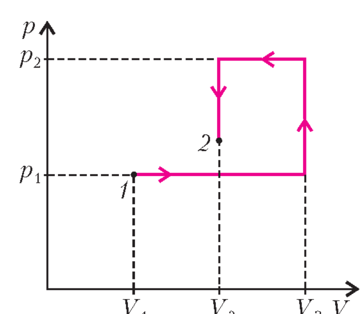


Рис. 4

6. Три одинаковых незаряженных металлических шарика *1*, *2* и *3* расположены вдоль одной прямой и связаны двумя одинаковыми длинными изолирующими нитями (рис.5). Четвертый такой же шарик зарядили и по очереди прикоснулись им к первым трем в порядке возрастания их номеров. Во сколько раз после этого отличаются силы натяжения нитей?

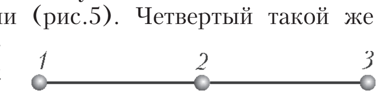


Рис. 5

7. Резистор сопротивлением $R = 18$ кОм и вольтметр соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения $U = 24$ В. Вольтметр при этом показывает напряжение $U_1 = 20$ В. Определите сопротивление r вольтметра.

8. Катушка индуктивностью L присоединена к плоскому конденсатору с площадью обкладок S и расстоянием между ними d. Чему равна диэлектрическая проницаемость ε среды, заполняющей пространство между обкладками, если амплитуда силы тока в контуре I_m , а амплитуда напряжения на конденсаторе U_m? Электрическая постоянная ε_0. Активным сопротивлением контура пренебречь.

9. Предмет находится на расстоянии $d = 20$ см от тонкой линзы, при этом размер действительного изображения в $\Gamma = 3$ раза превосходит размер предмета. Постройте ход лучей, формирующих изображение, и определите фокусное расстояние F линзы.

Публикацию подготовили А.Берестов, И.Горбатый, В.Гундырев, С.Куклин, И.Федоренко

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Первый автомобиль проходит в минуту на 300 м больше, чем второй, поэтому время прохождения одного километра у него на 10 секунд меньше. На сколько метров увеличивается отставание второго автомобиля от первого за время, пока первый проходит 1 км?

2. Решите уравнение $\cos 2x = 3 + 5\sin x$. Укажите его корни, лежащие в промежутке $[-3\pi/2; \pi/2]$.

3. Решите уравнение

$$\left(2 + \log_2\left(\frac{5}{4} - x\right)\right)\log_x \frac{1}{2} = 1 .$$

4. Решите неравенство $\dfrac{x\sqrt{x} - 1}{x - 1} > \sqrt{x} + \dfrac{3}{8}$.

5. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, ограниченный осью Ox, прямой $x = 3/2$ и касательной к графику функции $y = 2x^2$ в точке с абсциссой x_0, если $0 < x_0 < 3$?

6. Укажите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{8(|x| - x)} = 4 + a(x - 8)$$

имеет единственный корень. Найдите этот корень при каждом a.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны 4, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане BD боковой грани BTC, если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно $1/2$.

Вариант 2

1. Один рабочий взялся выполнить заказ за 15 дней при условии, что в течение 4 дней ему будет помогать второй рабочий. Если бы этот заказ был поручен каждому рабочему отдельно, то для его выполнения первому потребовалось бы на 6 дней меньше, чем второму. За сколько дней каждый из них может выполнить заказ?

2. Найдите все корни уравнения

$$\cos 3x + \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0 ,$$

принадлежащие промежутку $[\pi/2; \pi]$.

3. Решите уравнение $2^{1+\sqrt{x}} + 2^{2-\sqrt{x}} = 9$.

4. Решите неравенство $\log_2 \dfrac{x^2 - 2x}{x - 3} < 3$.

5. Какая наибольшая площадь может быть у равнобедренного треугольника, основание которого параллельно оси x, а координаты вершин удовлетворяют уравнению $|y| = 9 - (x - 2)^2$?

6. Определите все значения a, при которых уравнение $4x^2 - 8|x| + (2a + |x| + x)^2 = 4$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны 4, а высота пирамиды, равная 3, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы, описанной около пирамиды, и параллельной медиане AD боковой грани TAB.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Напишите формулировку закона Ома для замкнутой электрической цепи. Напишите формулу закона Ома для электрической цепи, изображенной на рисунке 1. Укажите единицы измерения входящих в нее физических величин.

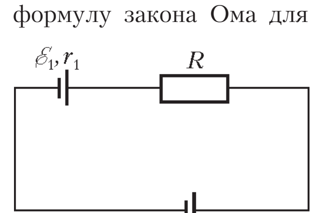


Рис. 1

2. Какую работу A нужно совершить над одним молем идеального газа для его изобарного сжатия, при котором концентрация молекул в конечном состоянии в $\alpha = 3$ раз больше, чем в начальном? Первоначальная температура газа $T_1 = 400$ К.

3. Протон и электрон, двигаясь с одинаковыми скоростями, попадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона R_1 больше радиуса кривизны траектории электрона R_2?

4. Найдите наибольший порядок спектра для желтой линии натрия с длиной волны 589 нм, если период дифракционной решетки 2 мкм.

5. Однородный стержень опирается о вертикальную плоскость, образуя с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 60°$ (рис.2). Коэффициент трения между стержнем и горизонтальной плоскостью $\mu_1 = 0,25$. Чему равна минимальная величина коэффициента трения μ_2 между стержнем и вертикальной плоскостью, при которой стержень будет находиться в равновесии?

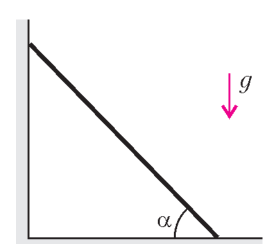


Рис. 2

6. Две бусинки, имеющие заряды $+q$ и $+3q$, удерживаются на длинном горизонтальном изолирующем стержне на расстоянии L_0 друг от друга (рис.3). Бусинку, имеющую заряд $+3q$ и массу m, отпускают, и она начинает скользить по стержню. Коэффициент трения скольжения равен μ. Найдите максимальное расстояние L между бусинками.

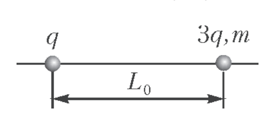


Рис. 3

7. К оси колеса, масса m которого равномерно распределена по ободу, присоединена пружина жесткостью k (рис.4). Второй конец пружины

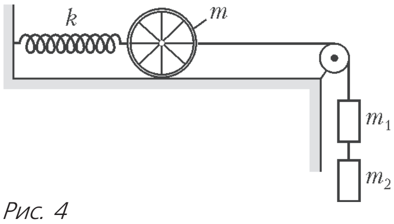


Рис. 4

прикреплен к стене. С помощью нити, перекинутой через блок, к оси колеса подвешены два груза с массами $m_1 = m$ и $m_2 = 3m$. Система пришла в движение с нулевой начальной скоростью при недеформированной пружине. Считая, что колесо катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания, определите максимальную силу натяжения нити, соединяющей грузы, при их дальнейшем движении. Массами пружины, нити и блока пренебречь.

Вариант 2

1. Напишите формулировку закона Ома для однородного участка электрической цепи. Напишите формулу закона Ома для участка цепи, изображенного на рисунке 5. Укажите единицы измерения входящих в нее физических величин.

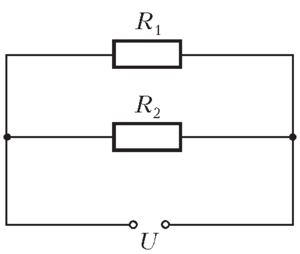


Рис. 5

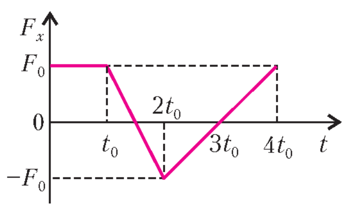


Рис. 6

2. На неподвижное тело массой m, находящееся на горизонтальной абсолютно гладкой плоскости, в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила, направленная вдоль горизонтальной оси X. На рисунке 6 представлен график зависимости проекции F_x этой силы от времени t. Определите модуль импульса тела в момент времени $t = 4t_0$.

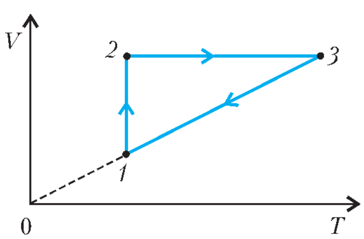


Рис. 7

3. Изменения состояния идеального газа при некотором круговом процессе *1–2–3–1* показаны на графике зависимости объема газа от абсолютной температуры (рис.7). Изобразите этот цикл на графике зависимости давления газа от объема. Укажите, на каких участках графика газ получает тепло извне.

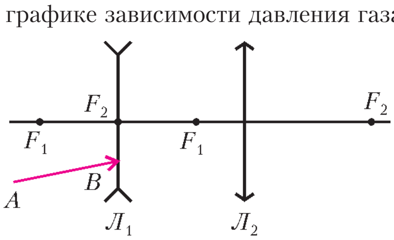


Рис. 8

4. Оптическая система состоит из рассеивающей линзы $Л_1$ и собирающей линзы $Л_2$ с общей главной оптической осью (рис.8). Главные фокусы рассеивающей линзы обозначены F_1, а собирающей – F_2. Постройте дальнейший ход луча AB через оптическую систему.

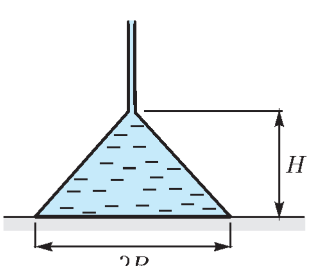


Рис. 9

5. Тонкостенная коническая воронка плотно стоит на горизонтальном столе (рис.9). Через отверстие в тонкой трубке в воронку наливают жидкость плотностью ρ. Когда жидкость заполняет всю коническую полость воронки, она приподнимает воронку и начинает вытекать из-под нее. Определите массу воронки, если радиус ее основания R, а высота конической части H.

6. Определите максимальную амплитуду гармонических колебаний системы, состоящей из двух брусков и двух невесомых пружин (рис.10), при которой бруски будут совершать колебания по горизонтальной плоскости без проскальзывания относительно друг друга. Жесткости пружин k и $2k$, масса нижнего бруска m, верхнего $2m$, коэффициент трения между брусками μ. В положении равновесия пружины не деформированы. Трение между нижним бруском и плоскостью отсутствует.

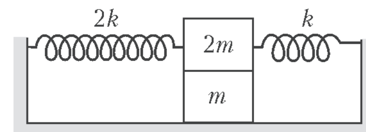


Рис. 10

7. По металлической ленте, толщина которой h, течет ток I (рис.11). Лента помещена в однородное магнитное поле, индукция которого равна B и направлена перпендикулярно поверхности ленты. Определите разность потенциалов между точками A и C ленты, если концентрация свободных электронов в металле равна n.

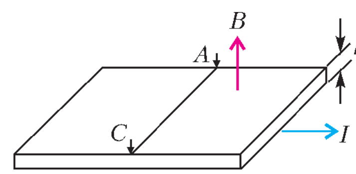


Рис. 11

Публикацию подготовили Л.Паршев, Ю.Струков

Московский инженерно-физический институт

(олимпиада Федерального агентства по атомной энергии РФ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Постройте график функции $y = \dfrac{3x-2}{2x+1}$.

2. Найдите производную функции

$$f(x) = 3x^3 - 6x^4 - \lg(2x) + \sqrt{9 - x^2}.$$

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos^2 x + \sin x$ на отрезке $\left[-\pi; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

4. При всех значениях параметра $a < 0$ вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми, задаваемыми уравнениями: снизу $y = a\sqrt{x}$, справа $(x-2)^2 + y^2 = 4$ и сверху $y = 0$.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной из точки $B(3;\,1)$, к графику функции $y = -2/x$.

6. Окружность с центром в точке O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и CA в точках K, L и M соответственно; $\angle KOL = 5\pi/6$, $\sin \angle MOL = 3/5$. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6. Найдите стороны и углы треугольника ABC.

Вариант 2

1. Постройте график функции $y = \log_3(6 + 3x)$.

2. Найдите производную функции

$$f(x) = -3x^3 - 6x^5 - 4d + \log_3(dx)$$

при всех значениях параметра d.

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = 3x\cos 3x - \sin 3x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = -\sqrt{4x}$ и $y = -\frac{x^2}{4}$.

5. Из точки $B(2;\ 0)$ проведена касательная к окружности $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 4$. Найдите абсциссу точки касания.

6. Стороны треугольника ABC находятся в отношении $AB : BC : CA = 5 : 7 : 6$. На сторонах треугольника AB, BC и CA взяты точки K, L, M соответственно так, что $AK : KB = 2 : 3$, $BL : LC = 3 : 4$, $CM : MA = 2 : 4$. Найдите площадь треугольника AKM и длину отрезка KM, если площадь треугольника ABC равна 60.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Тело массой m, движущееся со скоростью v по горизонтальной поверхности, налетает на пружину жесткостью k, второй конец которой закреплен (рис.1). На какую величину сожмется пружина к тому моменту времени, когда скорость тела станет равна $v/3$? Трение отсутствует.

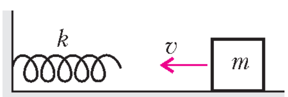


Рис. 1

2. Плавая в жидкости, тело кубической формы погружается на глубину h_1, а в другой жидкости – на глубину h_2. Какова будет глубина погружения тела в жидкости, плотность которой равна среднему арифметическому плотностей первых двух жидкостей? Считать, что во всех случаях тело расположено в жидкости так, что две его грани параллельны поверхности.

3. Два маленьких шарика связаны непроводящей пружиной. Если шарики зарядить одинаковыми зарядами q, то длина пружины будет равна l_1, а если зарядить одинаковыми зарядами $2q$, то длина пружины будет равна l_2. Найдите жесткость пружины.

4. В горизонтальном цилиндрическом сосуде длиной l находятся n подвижных теплонепроницаемых поршней, делящих сосуд на $n+1$ отсек (рис.2). Первоначально температура газа во всех отсеках равна T_0, а их объемы одинаковы. Затем газ в самом левом отсеке нагревают до температуры T_1, а температуру газа в других отсеках поддерживают равной T_0. На сколько сместится при этом самый правый поршень?

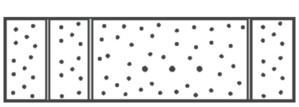


Рис. 2

5. На поверхности стола находится вертикальный цилиндр радиусом R, на который намотана длинная невесомая нерастяжимая нить. К концу свободного куска нити, длина которого l_0, привязано тело. Телу сообщают скорость v, направленную перпендикулярно нити так, что нить начинает сматываться с цилиндра (рис.3, вид сверху). Найдите время, за которое длина свободного куска нити увеличится вдвое. Трение отсутствует.

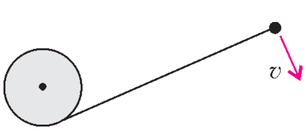


Рис. 3

Вариант 2

1. Груз массой $m = 1$ кг лежит на полу кабины лифта. При этом груз действует на пол лифта с силой $F = 5$ Н. Найдите величину и направление ускорения лифта. Ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$.

2. Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $d = 30$ см от линзы (рис.4). Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см. Линзу сместили на расстояние $a = 2$ см в направлении, перпендикулярном главной оптической оси. На какое расстояние переместилось при этом изображение источника?

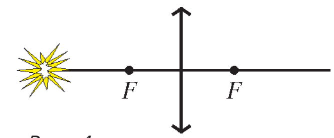


Рис. 4

3. В баллоне содержится ν молей одноатомного идеального газа при температуре T. При изохорическом нагревании газа средняя скорость молекул газа увеличилась в n раз. Найдите количество теплоты, подведенное к газу.

4. Корабль движется на север со скоростью v. Ветер дует с северо-запада под углом α к параллели. Скорость ветра, измеренная на корабле, равна u. Найдите скорость ветра относительно земли.

5. Индуктивность кольца известна и равна L (рис.5). Индуктивность контура, представляющего собой сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол $\pi/2$, также известна и равна L_1. Найдите индуктивность контура, представляющего сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол $3\pi/2$.

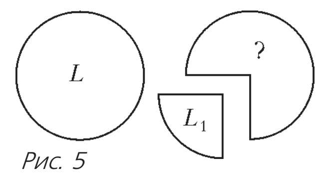


Рис. 5

Публикацию подготовили С.Муравьев, О.Нагорнов

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов. Первые три задачи – расчетные, различной степени трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения ориентироваться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – задача-оценка. Для ее решения необходимо разобраться в рассматриваемом физическом явлении, сформулировать простую (так как нужна только оценка) модель этого явления, выбрать разумные числовые значения величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивается, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – задача-демонстрация, при решении которой необходимо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Среди различных факторов, влияющих на процесс, необходимо выделить главный.

Вариант 1

1. Амперметры A_1 и A_2 имеют одинаковые сопротивления r и показывают токи I_1 и I_2 при включении в схему, приведенную на рисунке 1. Найдите сопротивление резистора R.

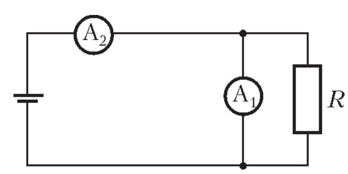


Рис. 1

2. Частицы с зарядом q и массой m движутся в магнитном поле с индукцией B по круговой орбите радиусом R и попадают в зазор между электродами (рис.2). Чтобы вывести пучок с круговой орбиты, на электроды подают напряжение, создающее однородное электрическое поле между ними. Какова напряженность этого поля, если частицы в зазоре между электродами летят с неизменной по величине и направлению скоростью?

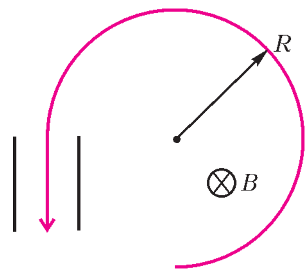


Рис. 2

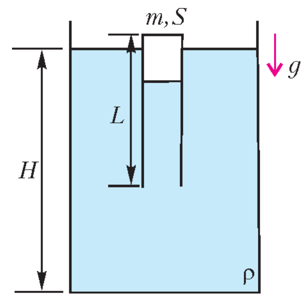


Рис. 3

3. В сосуде с водой глубиной H плавает перевернутая тонкостенная цилиндрическая пробирка длиной L, массой m и сечением S, содержащая некоторое количество воздуха (рис.3). Температуру системы медленно понижают. При температуре T_1 пробирка начинает тонуть и опускается до дна. Определите, до какой температуры T_2 теперь надо нагреть систему, чтобы пробирка всплыла? Считать, что плотность воды ρ не зависит от температуры, а воздух – идеальный газ. Ускорение свободного падения g, атмосферное давление p_0.

4. Спортсмен, разогнавшись на спортивных санках, несется, лежа на них, по горизонтальному льду. Оцените, при

Рис. 4

какой скорости он рискует перевернуться, если один полоз санок наедет на выступ длиной 20 см и высотой 3 см (рис.4).

5. На экран через непрозрачную пластину с двумя отверстиями падает свет от двух источников. При одном положении пластины на экране видны три световых пятна, расположенных на прямой линии, при повороте пластины на 90° на экране видны четыре пятна в вершинах прямоугольника (рис.5). Объясните демонстрируемое явление.

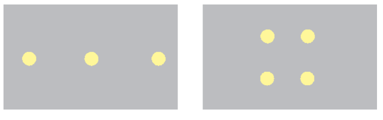


Рис. 5

Вариант 2

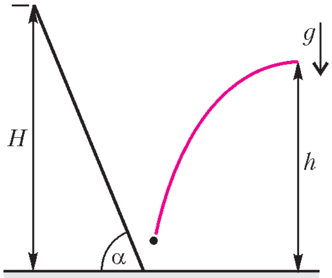


Рис. 6

1. Шарик соскальзывает с высоты H по наклонной плоскости и упруго ударяется о горизонтальный пол (рис.6). На какую наибольшую высоту он подпрыгнет? Угол между наклонной плоскостью и полом α, трения нигде нет.

2. Изображение точечного источника находится на оси линзы на расстоянии f от нее. Найдите фокусное расстояние линзы F и расстояние от источника до линзы d, если при опускании линзы на h перпендикулярно оси изображение смещается на H (рис.7).

3. Четыре частицы имеют одинаковые заряды q. Вначале их удерживают на прямой (рис.8) так, что расстояния r между соседними частицами равны ($AB = BC = CD$). Частицы отпускают. Они разлетаются, расстояния между соседними частицами увеличиваются, но остаются одинаковыми ($A'B' = B'C' = C'D'$). Известно, что масса каждой из внутренних частиц равна m. Найдите массы M крайних частиц, а также конечные скорости каждой частицы.

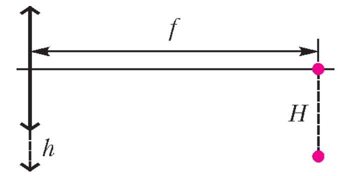


Рис. 7

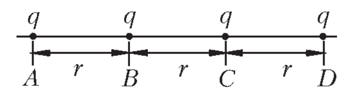


Рис. 8

4. За спутником, летящим по орбите в разреженной атмосфере, образуется область почти полного вакуума. Оцените наименьшую скорость молекул воздуха, которые могут оказаться на оси движения сзади спутника на расстоянии порядка его радиуса.

5. Две дощечки подвешены на проволочках, прикрепленных к стержню. Одна дощечка частично погружена в воду, другая лежит на подставке. При медленном подъеме стержня обе дощечки поднимаются. Когда стержень резко дергают вверх, то за ним поднимается лишь дощечка, лежащая на подставке, а проволочка, привязанная к дощечке, частично погруженной в воду, обрывается. Объясните демонстрируемое явление.

Вариант 3

1. С края горизонтального стола с начальной скоростью v слетает шарик. Через какое время величина его скорости увеличится на $1/4$ начальной скорости? Ускорение свободного падения g.

2. Цилиндр радиусом R и массой M соприкасается с дном и боковой стенкой наклонной прямоугольной коробки (рис. 9). Второй цилиндр меньшего радиуса r и массой m соприкасается с первым цилиндром и дном коробки. Найдите отношение масс M/m, если при угле наклона дна с горизонталью α первый цилиндр начинает подниматься. Трение между цилиндрами, стенкой и дном коробки отсутствует.

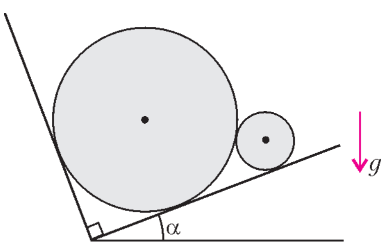


Рис. 9

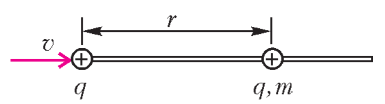


Рис. 10

3. На конце горизонтальной спицы закреплен заряд q, а на расстоянии r от него нитью удерживается насаженная на спицу бусинка массой m с таким же зарядом q (рис.10). Спица движется с горизонтальной скоростью v, направленной в сторону бусинки. Нить пережигают, а спицу, прикладывая к ней силу, продолжают двигать с прежней скоростью. Найдите работу этой силы к моменту времени, когда расстояние между зарядами увеличится до R. Трения нет.

4. В открытую сверху и снизу вертикальную трубу поступает углекислый газ (рис.11). Оцените, во сколько раз его температура должна превышать температуру окружаю-

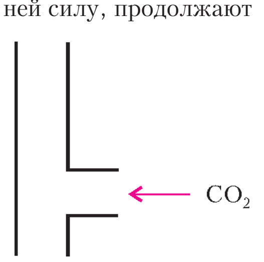


Рис. 11

щего воздуха, чтобы углекислый газ поднимался по трубе и выходил через верхнее отверстие.

5. На наклонной доске покоится тело. Оно не сползает, даже если заметно покачивать доску при неизменном ее наклоне. Однако при постукивании по доске сбоку тело сползает без сколь-нибудь заметных смещений доски. Объясните явление.

Публикацию подготовили И.Воробьев, Г.Меледин, Б.Шварц, Т.Рыбицкая

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

(факультеты математики, физики, информационных технологий, технологии и предпринимательства)

Вариант 1

1. Решите неравенство $\frac{\sqrt{9-x^2}}{x+1} > 0$.

2. Найдите решения уравнения $\cos(\pi - 2x) = 1 - \sin^2 2x$.

3. Длины сторон треугольника 3, 5 и 7. Определите радиус окружности, описанной около треугольника.

4. При каких значениях x числа 32^x, 6^{x^2+1}, 3^{5x} являются последовательными членами геометрической прогрессии?

5. Найдите решения неравенства $\log_2 x - \log_x 2 \geq \frac{3}{2}$.

6. Найдите двузначное число, если произведение его цифр равно 28, а его сумма с числом, записанным этими же цифрами, но в обратном порядке, равна 121.

7. Вычислите $\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

8. Один из корней уравнения $x^3 + ax^2 - 7x + 6 = 0$ равен 1. Вычислите два других корня.

9. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S, плоский угол боковой грани при вершине равен α. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\frac{1}{x+2} \leq \frac{2}{x+5}$.

2. Найдите решения уравнения $\sin 2x + 2\cos x = 0$ из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. В треугольнике, площадь которого равна 8, стороны $AC = b = 5$, $AB = c = 4$. Найдите длину третьей стороны ($\angle A < 90°$).

4. Решите уравнение $2\sqrt{x+1} = 3\sqrt[4]{x+1} + 77$.

5. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt[6]{2^x + 2^{|x|} - 2\sqrt{2}}.$$

6. Вычислите $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$.

7. Сколько граммов чистого спирта надо добавить к 735 г 16%-го раствора йода в спирте, чтобы получить 10%-й раствор?

8. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение

$$a - \left||x-2| - 2\right| = 0\ ?$$

9. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Из боковых граней две перпендикулярны к плоскости основания, а две другие образуют с ней углы α и β. Высота пирамиды равна H. Определите объем пирамиды.

Публикацию подготовили Г.Хамов, Т.Свеницкая, О.Корсакова

Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите наименьший корень уравнения

$$|x+2| = \sqrt{20-2x}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_5(2x-1)\log_{x+1} 5 = 1.$$

3. Найдите сумму корней уравнения

$$\sin x = -\cos x,$$

принадлежащих промежутку $\left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

4. Найдите количество целочисленных решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 \geq 0, \\ |x-1| \leq 4. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$5^{1+\sin x+\sin^2 x+\ldots} = 25.$$

6. Для решения (x, y, z) системы уравнений

$$\begin{cases} xy = 2, \\ xz = -3, \\ yz = -6 \end{cases}$$

найдите значение $x^2 + y^2 + z^2$.

7. Решите уравнение

$$\log_4 \sin^2 x - \log_{\sin x} 64 = \log_{\sqrt{2}} 4 + 1.$$

8. Вычислите

$$\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{2\cos\alpha + 1}$$

при $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

9. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $AD : DC = 1 : 2$. Найдите $\angle BDC$, если $AB = 5$, $BC = 7$ и $AC = 6$.

10. При каких значениях параметра k уравнение

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = -k^2 - k$$

имеет 2 решения?

Вариант 2

1. Найдите наибольший корень уравнения

$$|x-2| = \sqrt{5x-4}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2(3x-2)\log_{2x+3} 2 = 1.$$

3. Найдите сумму корней уравнения

$$\cos^2 x - \sin x = 1,$$

принадлежащих промежутку $\left(-\frac{3\pi}{4}; 0\right]$.

4. Найдите количество целочисленных решений системы неравенств

$$\begin{cases} 16 + 6x - x^2 \ge 0, \\ |x-2| \ge 2. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$2^{2^{\frac{5}{2}+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x+\ldots}} = 8.$$

6. Для решения (x, y, z) системы уравнений

$$\begin{cases} xy^2z^3 = 108, \\ x^2y^3z = 24, \\ x^3yz^2 = 18 \end{cases}$$

найдите значение $x^2 + y^2 + z^2 + 3$.

7. Решите уравнение

$$\log_3\left(4\cos^2 x\right) + 2\log_{2\cos x} 3 = \log_{\sqrt{3}} 9 + 1.$$

8. Вычислите

$$\frac{\sin 3\alpha + \cos 2\alpha - \sin\alpha}{2\sin\alpha + 1}$$

при $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

9. В треугольнике ABC, где $AB = 6$, $BC = 8$ и $AC = 7$, проведена биссектриса BD. Найдите $\angle BDC$.

10. При каких значениях параметра k уравнение

$$(x-2)(x-4)(x-6)(x-8) = 2k^2 + k$$

имеет 3 решения?

Вариант 3

(олимпиада-2007)

1. Определите, на какую цифру оканчивается число

$$N = 3^{2007}.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)\sin 3x = 2.$$

3. В заданную окружность вписаны одинаковые треугольники, один из углов которых равен 120°. Найдите геометрическое место точек всех сторон всех таких треугольников.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 5xy + 2x + 1 = 0, \\ 5x^2 - xy + 2y + 5 = 0. \end{cases}$$

5. В поликлинике работают 2 хирурга, 4 стоматолога и 6 терапевтов. Трое из этих врачей – мужчины. Определите, на сколько женщин-терапевтов больше, чем мужчин – стоматологов и хирургов.

6. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что $AD = 2a$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60^\circ$. Установите, какова минимальная возможная площадь треугольника BDC.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

Выберите правильный ответ

1. Автомобиль, двигавшийся со скоростью 20 м/с, начинает тормозить и останавливается, проехав расстояние 40 м. Сколько времени автомобиль тормозил, если его ускорение было постоянным?

1) 8 с; 2) 2 с; 3) 3 с; 4) 4 с; 5) 5 с.

2. Небольшой шарик подвешен на невесомой нерастяжимой нити в ракете, которая находится на стартовой площадке. Во сколько раз возрастает сила натяжения нити, когда ракета стартует с ускорением 20 м/с^2, направленным вертикально вверх?

1) Не изменяется; 2) в 2 раза; 3) в 3 раза; 4) в 4 раза; 5) ответ зависит от массы шарика.

3. Тело массой m_1 движется по гладкому столу, его кинетическая энергия равна 3 Дж. Движущееся тело сталкивается с покоившимся телом массой m_2. После неупругого удара тела движутся вместе, их кинетическая энергия равна 1 Дж. Найдите отношение масс m_2/m_1.

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 1/3.

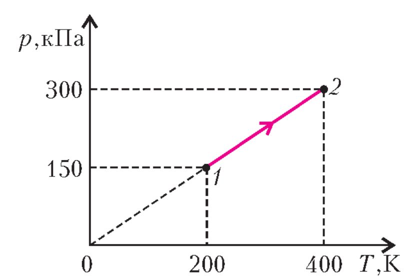


Рис. 1

4. На графике (рис.1) изображена изохора идеального газа, соответствующая объему 22,4 литра. Какое количество молей газа участвовало в этом процессе?

1) 1 моль; 2) 2 моль; 3) 0,5 моль; 4) 2,5 моль; 5) моль.

5. С постоянной массой идеального газа проводят следующий цикл. Сначала газ нагревают при постоянном объеме, сообщив ему 15 кДж тепла. Затем газ адиабатически расширяется, после чего его возвращают в начальное состояние изобарным сжатием. При сжатии от газа отводят 12,5 кДж тепла. Найдите работу газа за весь цикл.

1) 2,5 кДж; 2) 5 кДж; 3) 11 кДж; 4) 12,5 кДж; 5) 27,5 кДж.

6. Найдите общее сопротивление схемы, изображенной на рисунке 2. Сопротивления резисторов в омах указаны на схеме.

1) 5,5 Ом; 2) 11 Ом; 3) 15 Ом; 4) 22 Ом; 5) 60 Ом.

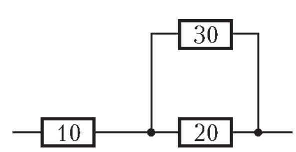


Рис. 2

7. В какую точку на прямой (рис.3) нужно поместить произвольный заряд Q, чтобы силы, действующие на него, были уравновешены?

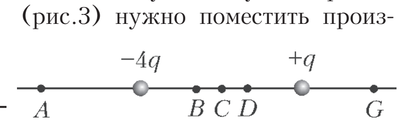


Рис. 3

1) A; 2) B; 3) C; 4) D; 5) G.

8. Квадратный контур расположен в однородном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости контура. При повороте контура на угол 30° вокруг одной из сторон через поперечное сечение контура проходит заряд 1 мКл. Какой заряд пройдет через поперечное сечение, если контур повернуть на 90° из того же начального положения? Ответ округлите!

1) 1,5 мКл; 2) 2 мКл; 3) 3 мКл; 4) 5 мКл; 5) 7,5 мКл.

9. Напряжение на конденсаторе в колебательном контуре зависит от времени по закону $u(t) = 20\sin 10^4 t$ (В). Емкость конденсатора равна 10^{-6} Ф. Найдите амплитудное значение силы тока в контуре.

1) $2\cdot10^{-6}$ А; 2) $2\cdot10^{-3}$ А; 3) 0,2 А; 4) 0,5 А; 5) 2 А.

10. Предельный угол полного отражения на границе раздела прозрачной пленки с воздухом равен 60°. Найдите показатель преломления пленки.

1) 1,155; 2) 1,25; 3) 1,67; 4) 1,732; 5) 2.

Вариант 2

Выберите правильный ответ

1. При движении тела вдоль оси X его координата зависит от времени по закону $x(t) = 60 - 15t$ (м). Найдите путь, пройденный телом за 6 с.

1) 30 м; 2) 60 м; 3) 90 м; 4) 150 м; 5) 360 м.

2. Телу сообщают начальную скорость 6 м/с, направленную вверх по наклонной плоскости (рис.4). Угол наклона плоскости составляет 30°. При движении на тело действует сила трения, равная половине силы тяжести. Найдите время движения тела до остановки.

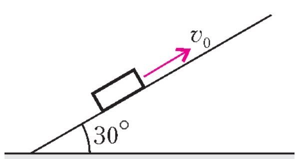


Рис. 4

1) 0,4 с; 2) 0,5 с; 3) 0,6 с; 4) 1 с; 5) 1,2 с.

3. Кинетическая энергия вагонетки, движущейся по рельсам без трения, равна 12 Дж. После загрузки масса вагонетки увеличивается в 3 раза, а ее импульс не изменяется. Найдите кинетическую энергию груженой вагонетки.

1) 4 Дж; 2) 8 Дж; 3) 12 Дж; 4) 24 Дж; 5) 36 Дж.

4. В одном сосуде находится азот, а в другом – гелий. Концентрация молекул гелия в 2 раза больше, чем концентрация молекул азота. Плотность какого газа больше и во сколько раз? Молярная масса гелия 4 г/моль, азота 28 г/моль.

1) Плотность гелия в 2 раза больше; 2) плотность азота в 3,5 раза больше; 3) плотность азота в 7 раз больше; 4) плотность азота в 14 раз больше; 5) необходимо знать температуры газов.

5. При сжатии некоторого количества идеального газа над ним совершают работу 300 Дж, при этом внутренняя энергия газа уменьшается на 300 Дж. Что можно сказать о переходе тепла в этом процессе?

1) Газ получает 300 Дж тепла; 2) газ получает 600 Дж тепла; 3) газ отдает 300 Дж тепла; 4) газ отдает 600 Дж тепла; 5) газ не отдает и не получает тепло.

6. К источнику ЭДС с внутренним сопротивлением 4 Ом подключен реостат. Укажите два значения сопротивления реостата, при которых на нем выделяется одна и та же мощность. Сопротивлением проводов пренебречь.

1) 1 Ом и 5 Ом; 2) 1 Ом и 16 Ом 3) 2 Ом и 6 Ом; 4) 2 Ом и 10 Ом; 5) 2 Ом и 16 Ом.

7. Два точечных заряда +1 мкКл и −4 мкКл находятся в вакууме на расстоянии 0,5 м друг от друга. Какую работу нужно совершить, чтобы сделать расстояние между зарядами очень большим? Коэффициент в законе Кулона $k = 9\cdot10^9$ Н·м^2/Кл^2.

1) 9 мДж; 2) 18 мДж; 3) 36 мДж; 4) 72 мДж; 5) 144 мДж.

8. В катушке индуктивности течет ток 2 А, магнитный поток через катушку равен 0,12 Вб. Чему равна энергия магнитного поля этой катушки?

1) 0,01 Дж; 2) 0,02 Дж; 3) 0,03 Дж; 4) 0,06 Дж; 5) 0,12 Дж.

9. Что нужно сделать для увеличения частоты колебаний математического маятника в 2 раза? Колебания считать малыми.

1) Увеличить длину в 2 раза; 2) увеличить длину в 4 раза; 3) уменьшить длину в 2 раза; 4) уменьшить длину в 4 раза; 5) уменьшить амплитуду колебаний в 2 раза.

10. На дифракционную решетку по нормали падает монохроматический свет. Известно, что период решетки в 10 раз больше длины волны падающего света. Под каким углом дифракции будет наблюдаться максимум 1-го порядка?

1) $\arcsin 0,1$; 2) $\arcsin 0,05$; 3) $\arcsin 0,01$; 4) 10°; 5) 30°.

Вариант 3

(олимпиада-2007)

1. Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа. У поверхности этой планеты атмосферное давление равна 9 МПа, плотность атмосферы 64 кг/м^3. Чему равна средняя квадратичная скорость молекул углекислого газа при этих условиях?

2. Магнит массой 50 г прикладывают к вертикальной стенке холодильника. Сила притяжения магнита к стенке равна 5 Н, коэффициент трения между магнитом и стенкой 0,2. Удержится ли магнит? Чему будет равна сила трения между магнитом и стенкой?

3. Колебательный контур радиоприемника настроен на прием электромагнитных волн длиной 60 м. В контуре происходят гармонические колебания. Найдите минимальное время, за которое заряд конденсатора этого контура убывает от амплитудного значения до нуля. Скорость света в вакууме $c = 3\cdot10^8$ м/с.

4. К источнику ЭДС с внутренним сопротивлением 8 Ом подключают нагрузку. При сопротивлении нагрузки 5 Ом на ней выделяется некоторая мощность P. При каком еще сопротивлении нагрузки на ней будет выделяться такая же мощность P? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

5. Тепловой двигатель работает по циклу, который изображен на рисунке 5. Рабочим телом является 1 моль идеального одноатомного газа. При изотермическом сжатии газа на участке *4–1* внешние силы совершают работу 1150 Дж. Найдите КПД цикла.

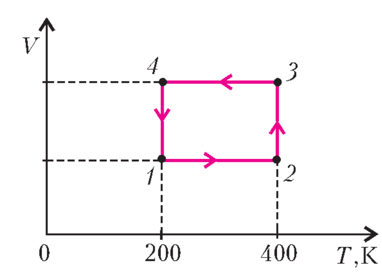


Рис. 5

6. В ускорителе пучок протонов, прошедших ускоряющее напряжение 50 кВ, направляют на неподвижную свинцовую мишень. Найдите максимальную силу взаимодействия протонов с ядрами атомов свинца. Атомный номер свинца 82. Коэффициент в законе Кулона $k = 9\cdot10^9$ Н·м^2/Кл^2, элементарный электрический заряд $e = 1,6\cdot10^{-19}$ Кл.

Публикацию подготовили А.Браун, Е.Введенская, Н.Выск, М.Кузьмин, А.Миронов, Л.Муравей, Г.Никулин, А.Покровский, П.Селин, А.Симонов, В.Федорчук

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите

$$\frac{a^6 + 0,064}{a^4 - 0,4a^2 + 0,16} - \frac{a^4 - 0,16}{a^2 + 0,4}.$$

2. Найдите наибольшее целое отрицательное число из области определения функции

$$f(x) = \log_5\left(2x^2 + 3x - 14\right).$$

3. Сумма первых 12 членов арифметической прогрессии равна 198. Найдите разность прогрессии, если ее первый член равен 33.

4. Решите уравнение $|x| - 7x - 24 = 0$.

5. Решите уравнение $\left(\sqrt[8]{23}\right)^{x-3} = \left(\sqrt[9]{24}\right)^{x-3}$.

6. Вычислите $\left[4^4\right]^{\log_{64} 3\sqrt{3}}$.

7. Вычислите $\left(\cos^2 65^\circ + \cos^2 25^\circ\right)\left(4\operatorname{tg} 45^\circ + 1\right)$.

8. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\cos 12x + \cos 6x = 7\cos 3x.$$

9. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором неравенство

$$x^6 - ax^2 + 20\sqrt{10} > 0$$

выполняется для всех значений x.

10. Сколько целых решений имеет неравенство

$$|x|^{x^2+2x-48} < 1?$$

11. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена высота CH. Эта высота пересекает биссектрису AL в точке P, а медиану AM – в точке Q. Известно, что $PL : AP = 2 : 1$. Найдите отношение $QM : AQ$.

12. Около правильной треугольной пирамиды описана сфера. Две другие сферы радиусов 13 и 7 расположены так, что каждая из них проходит через середины всех сторон основания и касается описанной сферы изнутри. Найдите радиус описанной сферы.

Вариант 2

1. Упростите и вычислите при $a = 5 + \sqrt{7}$, $c = 1/31$:

$$\left(\frac{\sqrt{2}c^2}{\sqrt[4]{2ac - a^2}} - \frac{a}{\sqrt[4]{2c} - a}\right)\frac{a}{a + \sqrt[4]{2c}}.$$

2. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\sqrt{3(x+2)} > 2x + 1.$$

3. Сумма семнадцатого и тридцать первого членов арифметической прогрессии равна 22. Найдите двадцать четвертый член этой прогрессии.

4. Решите уравнение

$$0,8|x - 0,4| = x^2 + 0,48.$$

5. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{12}\right)^{x-9} : 5^{x-9} = \frac{12}{25}.$$

6. Вычислите $\left(\lg 2^{3\log_2 10}\right)^3$.

7. Вычислите $\dfrac{\cos^2 186^\circ - \sin^2 6^\circ}{0,5\cos 12^\circ}$.

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения $\dfrac{\operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 5^\circ}{1 + \operatorname{tg} 8x \operatorname{tg} 5^\circ} = -1$.

9. К графику функции $y = x^4 - 6a^2x^2 - 3a^4$ можно провести единственную касательную, параллельную прямой $y = 400x - 100$. Найдите наибольшее целое значение, которое может принимать параметр a.

10. Найдите 3^x, где x – меньший корень уравнения $3^x \cdot 2^{\frac{x}{x-1}} = 36$.

11. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) площади 132 описана окружность. Продолжение биссектрисы, проведенной из вершины A, пересекает эту окружность в точке L, а продолжение медианы, проведенной из той же вершины, – в точке M. Площадь треугольника ALC равна 77. Найдите площадь треугольника AMC.

12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковая грань образует с плоскостью основания угол, косинус которого равен 0,6. В пирамиду вписана сфера радиуса 1. Найдите радиус сферы, которая проходит через все вершины основания так, что вписанная сфера касается ее изнутри.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Вариант 1

1. Камень, брошенный под углом к горизонту, находился в полете 4 с. Какой наибольшей высоты достиг камень?

2. Радиус некоторой планеты в $\sqrt{3}$ раза меньше радиуса Земли, а ускорение силы тяжести на поверхности планеты в 3 раза меньше, чем на поверхности Земли. Во сколько раз масса планеты меньше массы Земли?

3. Тело брошено вертикально вниз со скоростью 10 м/с с высоты 45 м. На какой высоте от поверхности земли кинетическая энергия тела увеличится вдвое?

4. Горячее тело, температура которого 65 °C, приведено в соприкосновение с холодным телом с температурой 20 °C. В тепловом равновесии установилась температура 35 °C. Во сколько раз теплоемкость холодного тела больше теплоемкости горячего?

5. Какова должна быть емкость (в пФ) конденсатора, который надо соединить последовательно с конденсатором емкостью 20 пФ, чтобы получить батарею конденсаторов емкостью 16 пФ?

6. Какой длины нужно взять никелиновую ленту, чтобы изготовить реостат сопротивлением 12 Ом? Удельное сопротивление никелина $4 \cdot 10^{-7}$ Ом·м, толщина ленты 1,5 мм, ширина 20 мм.

7. Математический маятник длиной 2,5 см совершает гармонические колебания с амплитудой 0,003 м. Определите наибольшую скорость движения грузика маятника (в см/с).

8. В реакции изотопа алюминия $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ и углерода $^{12}_{6}\mathrm{C}$ образуются α-частица, нейтрон и ядро некоторого изотопа. Определите количество нейтронов в образующемся ядре.

9. Шарик, подвешенный на легкой нити к потолку, вращается по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, с угловой скоростью 5 рад/с. Найдите расстояние (в см) между точкой подвеса и центром окружности.

10. В гладкий высокий стакан радиусом 4 см поставили палочку длиной 10 см и массой 90 г. После того как в стакан налили до высоты 4 см жидкость плотностью 900 кг/м^3, сила давления верхнего конца палочки на стенку стакана стала 0,4 Н. Чему равна плотность материала палочки?

11. Давление воздуха внутри плотно закупоренной бутылки при температуре 7 °C равно 150 кПа. До какой температуры (по шкале Цельсия) надо нагреть бутылку, чтобы из нее вылетела пробка, если известно, что для вынимания пробки до нагревания бутылки требовалась минимальная сила 90 Н? Площадь поперечного сечения пробки $8\ \text{см}^2$.

12. По П-образной рамке, наклоненной под углом $30°$ к горизонту и помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, начинает соскальзывать без трения перемычка массой 30 г. Длина перемычки 10 см, ее сопротивление 1 мОм, индукция магнитного поля 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

Вариант 2

1. Автомобиль, двигаясь равноускоренно, через 4 с после начала движения достиг скорости $8\ \text{м/с}$. Какой путь прошел автомобиль за четвертую секунду движения?

2. Вверх по наклонной плоскости высотой 9 м и длиной 15 м пущена шайба. Коэффициент трения равен 0,5. Найдите ускорение шайбы. В ответе укажите абсолютную величину ускорения.

3. На горизонтальной плоскости лежит тонкая цепь длиной 1 м и массой 4 кг. Чему равна минимальная работа по подъему цепи, взятой за один конец, на высоту, при которой нижний ее конец отстоит от плоскости на расстояние, равное длине цепи?

4. Однородный шар плавает на поверхности воды, на 60% погруженный в воду. Чему равен объем шара (в см^3), если на него действует выталкивающая сила 3 Н? Плотность воды $1000\ \text{кг/м}^3$.

5. Резиновую лодку надули утром, когда температура воздуха была $7\ °\text{C}$. На сколько процентов увеличилось давление воздуха в лодке, если днем он прогрелся под лучами солнца до $21\ °\text{C}$? Изменением объема лодки пренебречь.

6. Найдите полезную мощность батареи, ЭДС которой 48 В, если внешнее сопротивление 23 Ом, а внутреннее сопротивление батареи 1 Ом.

7. На катушке сопротивлением 2 Ом поддерживается напряжение 80 В. Чему равна энергия магнитного поля катушки, если ее индуктивность 15 мГн?

8. Расстояние между предметом и его уменьшенным в 6 раз мнимым изображением равно 25 см. Найдите расстояние от предмета до линзы (в см).

9. Стальной шар массой 300 г падает без начальной скорости с высоты 5 м на наклонную плоскость, составляющую угол $60°$ с горизонтом. Считая удар абсолютно упругим, найдите среднюю силу взаимодействия шара с наклонной плоскостью. Продолжительность удара составляет 0,02 с. Действием силы тяжести за время удара и сопротивлением воздуха пренебречь.

10. Шарик массой 5 г с зарядом 2 мКл подвешен на нити в горизонтальном электрическом поле с напряженностью $20\ \text{В/м}$, направленной слева направо. Шарик с нитью отводят вправо до горизонтального положения нити и отпускают. Найдите натяжение нити (в мН) в тот момент, когда она впервые составит с вертикалью угол α ($\cos\alpha = 0{,}8$).

11. Пуля, летевшая горизонтально со скоростью $500\ \text{м/с}$, пробила насквозь доску на высоте 20 см от земли. При этом температура пули увеличилась на $150\ °\text{C}$. Считая, что на нагревание пули пошла вся выделившаяся энергия, найдите, на каком расстоянии (по горизонтали) от места удара пуля упала на землю. Удельная теплоемкость материала пули $300\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}$.

12. Магнит массой 200 г лежит на горизонтальной металлической плите. Чтобы оторвать магнит от плиты, его надо потянуть вверх с силой 16 Н. Вместо этого плиту заставляют колебаться в вертикальном направлении по закону $y = A\sin\omega t$ с амплитудой $A = 5$ см. При какой минимальной циклической частоте ω магнит оторвется от плиты?

Публикацию подготовили Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение $\left(4x + \frac{x+3}{x-2}\right) : \frac{x-1}{x-2}$.

2. Решите неравенство $|x-1| < 2$.

3. Найдите производную функцию $y = 2x^2\sqrt{x} + \sqrt{x}$ в точке $x = 1$.

4. Одну из сторон прямоугольника увеличили на 25%. На сколько процентов следует уменьшить другую сторону, чтобы вернуть площадь к прежнему значению?

5. Решите неравенство $\sqrt{x+3} \le 9 - x$.

6. Вычислите $x_1^3x_2^5 + x_1^5x_2^3$, если x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 - 4x + 2 = 0$.

7. Найдите целое число – значение выражения $\operatorname{ctg} 15° + 2\sqrt{2}\cos 105°$.

8. Решите уравнение $\sin 2x - 3 = 3\cos x - 3\sin x$.

9. Найдите целое число – значение выражения $\dfrac{\log_2\left(\sqrt{19} - 3\sqrt{2}\right)}{\log_8\left(\sqrt{19} + 3\sqrt{2}\right)}$.

10. Какое число больше: $a = \log_{\sqrt{2}+1}\left(\sqrt{2} + 2\right)$ или $b = \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + 1\right)$?

11. Решите уравнение $3^x + 5^x = 2^{3x}$.

12. Найдите разность возрастающей арифметической прогрессии с целочисленными членами, среди первых 20 членов которой имеются числа 33, 48, 88.

13. Найдите целое число – значение выражения $\frac{15}{\pi}\arcsin\sin\frac{112\pi}{15}$.

14. Решите уравнение $\arccos\left(2x^2 - 1\right) + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

15. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(6-x)\log_3(x-1)}.$$

16. Найдите множество значений функции

$$y = 2\sin^2 x - \sin x.$$

17. Решите уравнение $x - |x-3| = \sqrt{3 - |x-4|}$.

18. Биссектриса и медиана, проведенные из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, образуют угол, синус которого равен $1/\sqrt{3}$. Вычислите площадь треугольника, если биссектриса имеет длину 3.

19. Вычислите объем правильного тетраэдра, площадь полной поверхности которого равна $16\sqrt{3}$.

20. При каких значениях параметра $a > 0$ окружности $(x-6a)^2 + (y-2a)^2 = 36a^2$ и $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$ касаются друг друга?

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Упростите выражение $\dfrac{(a-5)\left(a^2-3a+2\right)\left(a^2-7a+12\right)}{\left(a^2-5a+6\right)\left(a^2-9a+20\right)}$.

2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $1\Big/\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$.

3. Найдите произведение общих корней уравнений $x^3+2x^2-1=0$ и $x^3-2x+1=0$.

4. Решите уравнение $\sqrt{-x^2+4x-3}=1-x$.

5. Решите неравенство $|x-2|-|x-1|\ge 1$.

6. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$, а $\operatorname{tg}(\beta/2)$ – корень уравнения $t^2-6t-1=0$.

7. Найдите такую четную функцию $y=f(x)$, что разность $e^x-f(x)$ – нечетная функция.

8. Найдите множество значений функции $y=\cos\left((\pi\sin x)/2\right)$.

9. Найдите наименьший из положительных корней уравнения $\sin 5x=\cos 4x$.

10. Решите неравенство $\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{1/x-1}\right)\ge\arcsin\sqrt{x}$.

11. Решите уравнение $3^{2x+1}+2^{2x+1}=5\cdot 6^x$.

12. Решите неравенство $\lg\left(4x-x^2-3\right)\le\lg(x-3)^2$.

13. Найдите наибольшее из двузначных чисел, которые имеют остаток 1 при делении на 5 и остаток 2 при делении на 7.

14. Найдите наименьшее из таких значений a, для которых расположенные в некотором порядке числа a; 1; 4 образуют конечную геометрическую прогрессию.

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2-2x+2,\\ x=y^2-2y+2.\end{cases}$$

16. Найдите номер наибольшего элемента последовательности $\left\{n^{12}/e^{4n}\right\}$.

17. Касательная к параболе $x=y^2$ проходит через точку $A(0;1)$. Найдите точку касания $(x_0;y_0)$.

18. Площадь треугольника равна 6, а две его стороны имеют длины 1 и 15. Найдите длину медианы, проведенной к третьей стороне.

19. В правильную треугольную призму вписан шар и около нее описан шар. Найдите радиус описанного шара, если радиус вписанного шара равен $\sqrt{5}$.

20. Найдите все значения параметра a, при которых уравнения $|\sin x|=a$ и $\cos 2x=1-2a^2$ равносильны.

Публикацию подготовили А.Басов, А.Моисеев, С.Преображенский

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет)

1. Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс координатной плоскости Oxy, а две другие – на графике функции $y=2x^2+6x+\dfrac{1}{2}$. Найдите площадь квадрата.

2. Решите уравнение $x\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}=x^2-3x-6$.

3. Решите неравенство $x\log_2\left(4^{\frac{1}{x}}-\dfrac{3}{4}\right)>1$.

4. Все вершины правильной четырехугольной призмы лежат на поверхности тетраэдра $ABCD$, ребра которого равны 2. При этом AB и CD параллельны ребрам основания призмы. Найдите высоту призмы, если известно, что она в два раза короче каждого из ребер основания призмы.

5. Найдите все целые положительные n, при которых уравнение $\sin nx+\sin x=0$ имеет только одно решение на промежутке $(0;\,1)$.

Вариант 2

(факультет психологии)

1. Арифметическая прогрессия состоит из пяти членов. Сумма квадратов членов с нечетными номерами равна 14. Сумма кубов членов с четными номерами равна 19. Найдите сумму членов прогрессии.

2. Решите уравнение

$$\log_2^2(5x)+\log_2^2(7x)=\log_2^2 5+\log_2^2 7.$$

3. Решите уравнение

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+y+z}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+y+z}=\dfrac{1}{5},\\ \dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x+y+z}=\dfrac{1}{10}.\end{cases}$$

5. Дан треугольник PQR. Точка T – центр вписанной окружности. Лучи PT и QT пересекают прямую, проходящую через точку R параллельно стороне PQ, в точках E и F соответственно. Известно, что площади треугольников PQR и TFE равны. Какую часть сторона PQ составляет от периметра треугольника PQR?

Вариант 3

(филологический факультет)

1. Между городами A и B организовано регулярное круглосуточное автобусное сообщение. Каждый час одновременно из A и из B отправляются автобусы. Через полчаса после отправления очередных автобусов из A и B выехал автомобиль и через 1 час догнал вышедший перед ним автобус, а еще через 3 часа 40 минут доехал до города B. Со сколькими встречными автобусами он повстречался?

2. Решите уравнение $\sin 8x+2\sin 4x+4\cos 2x=0$.

3. Решите неравенство $\sqrt{x^2-x}<(x+2)|x-3|$.

4. Одна окружность вписана в треугольник ABC, а другая касается лишь двух его сторон AC и BC. Кроме того, обе окружности касаются прямой, параллельной стороне AB, и расстояние между их точками касания с AC равно 6. Найдите AB, если известно, что $AC=35$ и $BC:AB=1:2$.

5. Решите уравнение $4\cdot 3^{x+2}+14\cdot 5^x=25^x+49$.

Публикацию подготовили А.Громов, А.Осипов, Ю.Чурин

XLVIII Международная математическая олимпиада

В период с 19 по 31 июля 2007 года в Ханое (Вьетнам) прошла XLVIII Международная математическая олимпиада (ММО), собравшая рекордное количество участников: 520 школьников из 93 стран. Ребятам из разных уголков мира представилась возможность пообщаться с юными математиками других стран, познакомиться с культурными традициями Вьетнама, полюбоваться удивительной красотой «залива тысячи островов» Калонг.

В состав команды России в этом году вошли одиннадцатиклассники *Сергей Дроздов* (Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» при ФТИ им. А.Ф.Иоффе), *Алексей Есин* (Краснодарский край, станица Старонижестеблиевская, школа 55), *Мария Илюхина* (Москва, лицей «Вторая школа»), *Константин Матвеев* (Омск, лицей 66), *Иван Митрофанов* (Коломна, гимназия 2), а также десятиклассник *Владислав Волков* (Санкт-Петербург, ФМЛ 239).

Команда России блестяще выступила на ММО-2007, завоевав 5 золотых и 1 серебряную медаль и став лучшей в неофициальном командном зачете. Золотыми медалями награждены С.Дроздов, А.Есин, М.Илюхина, К.Матвеев, И.Митрофанов, серебряной – В.Волков. Вот результаты выступления нашей команды:

	Баллы за задачи						Сумма баллов
	1	2	3	4	5	6	
К.Матвеев	7	7	2	7	7	7	37
М.Илюхина	7	7	5	7	7	1	34
А.Есин	7	7	2	7	7	1	31
С.Дроздов	7	7	1	7	7	0	29
И.Митрофанов	7	7	1	7	7	0	29
В.Волков	7	7	1	7	2	0	24

По традиции, олимпиада прошла в два тура, в каждом из которых участникам предлагалось по 3 задачи. Заключительные задания каждого дня олимпиады оказались как никогда сложными: задачу 6 смогли полностью решить лишь пять участников олимпиады, а задачу 3 – всего два. В результате лучший результат на олимпиаде составил 37 баллов из 42 возможных, и его добился член нашей команды – Константин Матвеев, ставший абсолютным победителем олимпиады. (Удивительно, что ровно 15 лет назад в составе команды СНГ на Международной олимпиаде также выступил участник Константин Матвеев, набравший точно такие же баллы по каждой задаче!) Шестое место среди всех участников ММО-2007 заняла Мария Илюхина, двенадцатое – Алексей Есин. Всем троим золотые медали лично вручил президент Вьетнама, награждавший самых лучших участников олимпиады.

Команда России впервые стала единоличным победителем Международной математической олимпиады в неофициальном командном зачете, обойдя на 3 балла традиционно лучшую на ММО команду Китая. Вот результаты первых двадцати команд:

№ Страна	Общее число баллов	Количество медалей: золото	серебро	бронза
1. Россия	184	5	1	0
2. Китай	181	4	2	0
3. Вьетнам	168	3	3	0
4. Ю.Корея	168	2	4	0
5. США	155	2	3	1
6. Украина	154	3	1	2
7. Япония	154	2	4	0
8. КНДР	151	1	4	0
9. Болгария	149	2	3	1
10. Тайвань	149	2	3	1
11. Румыния	146	1	4	1
12. Иран	143	1	3	2
13. Гонконг	143	0	5	1
14. Таиланд	133	1	3	2
15. Германия	132	1	3	1
16. Венгрия	129	0	5	0
17. Турция	124	1	2	2
18. Польша	122	1	2	2
19. Белоруссия	119	1	1	4
20. Молдова	118	0	3	2

Руководство команды выражает благодарность всем педагогам-наставникам, воспитавшим ребят, а также тренерскому совету национальной сборной 2007 года, прекрасно подготовившему команду к олимпиаде. На сборах, проходивших в период с 26 июня по 16 июля в пансионате «Лисицкий бор» Тверской области, с командой работали: профессор Ярославского государственного университета В.Л.Дольников, педагог ФМЛ 239 (Санкт-Петербург) М.Я.Пратусевич, программист Г.Р.Челноков (Москва), а также победители и призеры Международных математических олимпиад прошлых лет: В.В.Астахов – студент мехмата МГУ, А.И.Бадзян – студент МФТИ, С.Л.Берлов – педагог ФМЛ 239 (Санкт-Петербург), А.А.Глазырин – аспирант мехмата МГУ, М.И.Исаев – студент МФТИ, Д.В.Карпов – научный сотрудник Петербургского отделения Математического института РАН и преподаватель СПбГУ, П.А.Кожевников – старший преподаватель МФТИ, Д.Г.Фон-Дер-Флаасс – научный сотрудник Сибирского отделения Математического института РАН.

Руководителями команды России в 2007 году были Н.Х.Агаханов – доцент МФТИ и А.И.Гарбер – аспирант Математического института РАН.

Руководство команды выражает огромную благодарность Дмитрию Юрьевичу Дойхену за постоянную поддержку подготовки национальной команды России по математике и ее участия в международных математических соревнованиях.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Даны действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для каждого i ($1 \le i \le n$) положим

$$d_i = \max\left\{a_j : 1 \le j \le i\right\} - \min\left\{a_j : i \le j \le n\right\}.$$

Пусть

$$d = \max\left\{d_i : 1 \le i \le n\right\}.$$

а) Докажите, что для любых действительных чисел $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ справедливо неравенство

$$\max\left\{\left|x_i - a_i\right| : 1 \le i \le n\right\} \ge \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

б) Покажите, что существуют такие действительные числа $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, что неравенство (*) обращается в равенство.

(Новая Зеландия)

2. Даны пять точек A, B, C, D, E такие, что $ABCD$ – параллелограмм, а около четырехугольника $BCED$ можно описать окружность. Прямая l проходит через точку A, пересекает отрезок DC в его внутренней точке F, а прямую BC – в точке G. Предположим, что $EF = EG = EC$. Докажите, что прямая l является биссектрисой угла DAB.

(Люксембург)

3. См. задачу М2085 «Задачника «Кванта».

(Россия)

4. Биссектриса угла BCA треугольника ABC пересекает его описанную окружность вторично в точке R и пересекает серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC в точках P и Q соответственно. Точки K и L – середины отрезков AC и BC соответственно. Докажите, что площади треугольников RPK и RQL равны.

(Чехия)

5. Положительные целые числа a и b таковы, что число $\left(4a^2-1\right)^2$ делится на $4ab-1$. Докажите, что $a = b$.

(Великобритания)

6. Пусть n – целое положительное число. Рассмотрим множество

$$S = \left\{(x; y; z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\right\},$$

состоящее из $(n+1)^3 - 1$ точек трехмерного пространства. Найдите наименьшее возможное количество плоскостей, объединение которых содержит все точки из S, но не содержат точку $(0; 0; 0)$.

(Голландия)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1 (А.Есин). а) Пусть d совпадает с числом d_l $(1 \le l \le n)$. Найдем такие $k \in \{1, \ldots, l\}$, $m \in \{l+1, \ldots, n\}$, что $a_k = \max\{a_1, \ldots, a_l\}$, $a_m = \min\{a_l, \ldots, a_n\}$; тогда $d = a_k - a_m$. Предположим, что $|x_k - a_k| < \frac{d}{2}$ и $|x_m - a_m| < \frac{d}{2}$; тогда $(x_m - a_m) - (x_k - a_k) < d$. Но, с другой стороны, $(x_m - a_m) - (x_k - a_k) = (a_k - a_m) + (x_m - x_k) = d + (x_m - x_k)$, что не меньше d, так как $m \ge k$. Полученное противоречие показывает, что $\max\{|x_k - a_k|, |x_m - a_m|\} \ge d$.

б) Положим $x_i = \max\{a_1, \ldots, a_i\} - \frac{d}{2}$; легко видеть, что $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Докажем, что $|x_i - a_i| \le \frac{d}{2}$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Из пункта а) тогда будет следовать, что $\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} = \frac{d}{2}$. Предположим противное: пусть для какого-то l выполнено $|x_l - a_l| > \frac{d}{2}$.

Случай 1: пусть $x_l - a_l > \frac{d}{2}$. Тогда

$$\max\{a_1, \ldots, a_l\} - \frac{d}{2} - a_l > \frac{d}{2} \Rightarrow d < \max\{a_1, \ldots, a_l\} - a_l \le$$

$$\le \max\{a_1, \ldots, a_l\} - \min\{a_l, \ldots, a_n\} = d_l .$$

Противоречие.

Случай 2: пусть $x_l - a_l < -\frac{d}{2}$. Тогда

$$\max\{a_1, \ldots, a_l\} - \frac{d}{2} - a_l < -\frac{d}{2} \Rightarrow \max\{a_1, \ldots, a_l\} < a_l .$$

Противоречие.

2 (В. Волков). Введем обозначения: $\angle CDE = \angle CBE = \varphi$ (четырехугольник $BCED$ – вписанный), $EG = EC = EF = x$ (радиусы окружности с центром E), $\angle CGE = \angle GCE = \alpha$, $\angle FCE = \angle CFE = \beta$ (рис.1). Заметим, что $\Delta AFD \sim \Delta GFC$, так как $AD \parallel GC$, поэтому $\frac{AD}{GC} = \frac{FD}{FC} \Rightarrow \frac{BC}{GC} = \frac{FD}{FC}$. Далее, $\angle CEB = \alpha - \varphi > 0$ ($\angle GCE$ – внешний для треугольника CEB), поэтому по теореме синусов для треугольника CEB: $BC = \frac{x}{\sin\varphi}\sin(\alpha - \varphi)$. А из равнобедренного треугольника CEG: $CG = 2x\cos\alpha$. Аналогично, из треугольника DEF: $FD = \frac{x}{\sin\varphi}\sin(\beta - \varphi)$, а из треугольника CEF: $CF = 2x\cos\beta$. Значит,

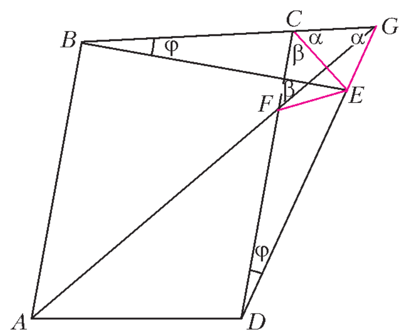


Рис. 1

$$\frac{BC}{GC} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{2\cos\alpha\sin\varphi}, \quad \frac{FD}{FC} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{2\cos\beta\sin\varphi},$$

откуда

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\alpha} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\cos\beta}.$$

Но $0 < \alpha$, $\beta < \frac{\pi}{2}$, поэтому $0 < \alpha - \varphi$, $\beta - \varphi < \frac{\pi}{2}$. Если предположить, что $\alpha > \beta$, то $\cos\alpha < \cos\beta$ и $\sin(\alpha - \varphi) > \sin(\beta - \varphi)$, откуда $\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\alpha} > \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\cos\beta}$. Аналогично, предположение о том, что $\alpha < \beta$, сводится к противоречию. Значит, $\alpha = \beta$. Тогда треугольники CEG и CEF равны $\Rightarrow CF = CG \Rightarrow \Delta CFG$ – равнобедренный. Отсюда $\angle BAG = \angle CFG = \angle CGF = \angle DAG$, т.е. AG – биссектриса угла BAD.

4. Если $P = Q$, то P – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AC и BC, поэтому биссектриса CR является серединным перпендикуляром к AB. Тогда равенство $S_{PRK} = S_{QRL}$ следует из симметрии относительно CR.

Пусть $P \ne Q$. Прямые PK и LQ пересекаются в центре O описанной окружности треугольника ABC (рис.2). Из подобных прямоугольных треугольников CLQ и CKP:

$$PK \cdot CQ = QL \cdot CP, \quad \angle CQL = \angle CPK .$$

Далее, треугольник OPQ равнобедренный, поэтому P и Q симметричны относительно точ-

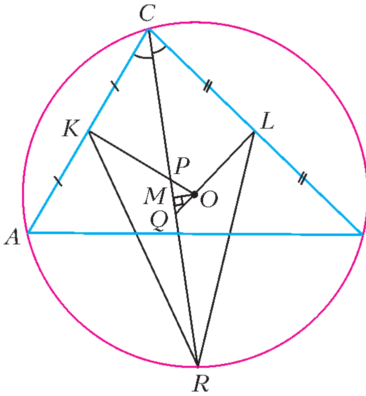


Рис. 2

ки M, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из O на CR. Точка M – середина CR, поэтому $CP = QR$, $CQ = PR$.

Отношение искомых площадей равно

$$\frac{S_{PRK}}{S_{QRL}} = \frac{PK \cdot PR \cdot \sin\angle RPK}{QL \cdot QR \cdot \sin\angle RQL} = \frac{PK \cdot CQ \cdot \sin\angle CPK}{QL \cdot CP \cdot \sin\angle CQL} = 1 .$$

5 (И.Митрофанов). Если $\left(4a^2-1\right)^2$ делится на $4ab-1$, то

$$\left(4a^2-1\right)^2 - 2\left(4a^2-1\right)(4ab-1) + (4ab-1)^2 = \\ = \left(\left(4a^2-1\right)-(4ab-1)\right)^2 = (4a)^2(a-b)^2$$

делится на $4ab-1$. Поскольку $4ab-1$ и $4a$ взаимно просты, получаем, что $(a-b)^2$ делится на $4ab-1$, т.е.

$$(a-b)^2 = k(4ab-1) \qquad (1)$$

для некоторого целого k. При $k = 0$ получаем $a = b$. Докажем, что при фиксированном $k > 0$ условие (1) неразрешимо в натуральных a, b. Пусть это не так. Тогда рассмотрим все пары натуральных чисел (a,b), для которых выполнено (1) (очевидно, для таких пар $a \neq b$), и выберем из них пару (a_0,b_0) с наименьшим $b = b_0$; в силу симметрии равенства (1), для пары (b_0,a_0) оно также выполнено, поэтому $b_0 < a_0 = tb_0$ для некоторого действительного $t > 1$. Перепишем (1) для $a = a_0$, $b = b_0$ в виде

$$a_0^2 - (2+4k)\,a_0b_0 + \left(b_0^2+k\right) = 0 . \qquad (2)$$

Мы видим, что квадратное уравнение $x^2-(2+4k)b_0x + \left(b_0^2+k\right) = 0$ имеет целый корень $x_1 = a_0$, значит, оно имеет и второй целый корень, который в силу теоремы Виета равен $x_2 = \frac{b_0^2+k}{a_0} > 0$. Пара (b_0,x_2) удовлетворяет равенству (1), поэтому $x_2 > b_0$ в силу выбора b_0. Получаем $\frac{b_0^2+k}{a_0} > b_0$, откуда $k > b_0(a_0-b_0) = b_0^2(t-1)$.

Подставляя $a = tb_0$, $b = b_0$ в равенство (1), имеем

$$b_0^2(t-1)^2 = k\left(4tb_0^2-1\right) > b_0^2(t-1)\left(4tb_0^2-1\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow t-1 > 4tb_0^2-1 \Rightarrow 1 > 4b_0^2 .$$

Противоречие.

6 (К.Матвеев). *Ответ*: $3n$.

Примером $3n$ соответствующих плоскостей, объединение которых содержит данное множество S, могут служить плоскости, задаваемые уравнениями вида $x = 1$, $x = 2$, … …, $x = n$, $y = 1$, $y = 2$, …, $y = n$, $z = 1$, $z = 2$, …, $z = n$. Очевидно, что каждая точка из S попадет хотя бы в одну из этих плоскостей, ибо имеет хотя бы одну ненулевую координату.

Теперь осталось показать, что объединением плоскостей, количество которых меньше $3n$, множество S покрыто быть не может.

Проведем доказательство от противного. Пусть множество S может быть покрыто объединением менее чем $3n$ плоскостей. Запишем уравнения этих плоскостей:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 ,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 ,$$

$$\ldots$$

$$a_kx + b_ky + c_kz + d_k = 0 .$$

Здесь, во-первых, $k < 3n$ и, во-вторых, ни одно из чисел d_1, d_2, …, d_k не равно 0, иначе соответствующая плоскость проходила бы через точку $(0;0;0)$.

Перемножив левые части уравнений этих плоскостей, получим многочлен $Q(x;y;z)$ от трех переменных, обращающийся в 0 при подстановке вместо $(x;y;z)$ координат любой точки множества S. Отметим, что $Q(0;0;0) = d_1d_2\cdot\ldots\cdot d_k \neq 0$, а степень многочлена $Q(x;y;z)$ меньше $3n$.

Рассмотрим теперь многочлены

$$g_1(x) = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n) ,$$
$$g_2(y) = y(y-1)\cdot\ldots\cdot(y-n) ,$$
$$g_3(z) = z(z-1)\cdot\ldots\cdot(z-n) .$$

Каждый из них обращается в 0 во всех точках множества S (эти многочлены можно рассматривать как многочлены трех переменных, степени вхождения двух из которых только нулевые, и в этом качестве подставлять в них координаты точек множества S).

Разделим с остатком многочлен $Q(x;y;z)$, рассмотренный как многочлен от x, на $g_1(x)$. Получим равенство $Q(x;y;z) = g_1(x)\cdot A_1(x;y;z) + Q_1(x;y;z)$. При этом, во-первых, степень вхождения переменной x в многочлен $Q_1(x;y;z)$ будет на больше n, во-вторых, $Q_1(x;y;z)$ обращается в 0 во всех точках множества S (поскольку во всех точках множества S обращаются в 0 многочлены $Q(x;y;z)$ и $g_1(x)$) и, в-третьих, $Q_1(x;y;z)$ не обращается в 0 при $x = y = z = 0$ (поскольку $Q(0;0;0) = Q_1(0;0;0)$).

Аналогично получим равенство $Q_1(x;y;z) = g_2(y) \times \times A_2(x;y;z) + Q_2(x;y;z)$, где многочлен $Q_2(x;y;z)$ обращается в 0 во всех точках множества S, причем степень вхождения каждой из переменных x и y в $Q_2(x;y;z)$ не превосходит n и $Q_2(0;0;0) \neq 0$.

Наконец, получаем равенство $Q_2(x;y;z) = g_3(z) \times \times A_3(x;y;z) + T(x;y;z)$, где многочлен $T(x;y;z)$ обращается в 0 во всех точках множества S и степень вхождения в $T(x;y;z)$ каждой из переменных x, y и z не превосходит n, причем $T(0;0;0) \neq 0$. Тем самым, $T(x;y;z)$ не является тождественно нулевым многочленом.

Рассмотрим теперь одночлен $ax^sy^tz^u$ ($a \neq 0$) наибольшей степени $s+t+u$ в многочлене $T(x;y;z)$. Одно из чисел s, t, u должно быть строго меньше n, так как степень многочлена $T(x;y;z)$ не превосходит степени многочлена $Q(x;y;z)$, которая, в свою очередь, меньше $3n$. Не умаляя общности, пусть $s < n$.

Имеет место следующая теорема (см., например, книгу «Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2005 года»):

Пусть $P(x;y;z)$ – ненулевой многочлен от трех переменных с вещественными коэффициентами, одночлен наибольшей степени которого имеет вид $ax^sy^tz^u$ ($a \neq 0$). Пусть A, B, C – конечные множества вещественных чисел, причем в A содержится не менее $s+1$ элементов, в B – не менее $t+1$ элементов, в C – не менее $u+1$ элементов. Тогда существуют числа $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, $z_0 \in C$ такие, что $P(x_0;y_0;z_0) \neq 0$.

Применив эту теорему к многочлену $T(x;y;z)$ и множествам $A = \{1;2;\ldots;n\}$, $B = \{0;1;\ldots;n\}$, $C = \{0;1;\ldots;n\}$, приходим к противоречию, поскольку в силу построения многочлена $T(x;y;z)$ он обращается в 0, если одновременно $x \in A$, $y \in B$ и $z \in C$.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, П.Кожевников, М.Пратусевич, Д.Фон-Дер-Флаасс

XXXVIII Международная физическая олимпиада

337 участников из 76 стран прилетели в Иран, а именно в город Исфахан, на очередную Международную физическую олимпиаду школьников. Вместе с ними прибыли сопровождающие их руководители команд и наблюдатели – всего 185 человек.

В сборную России вошли:

Андрей Котов – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,

Дмитрий Мыльников – Москва, школа 27 с углубленным изучением отдельных предметов,

Ксения Соловьева – Москва, школа 146 с углубленным изучением физики, математики, информатики,

Сергей Ефимов – Бийск, Бийский лицей Алтайского края, 10 класс,

Ярослав Бельтюков – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» при ФТИ им. А.Ф.Иоффе.

Нашу команду возглавили профессор Московского физико-технического института С.М.Козел и доцент МФТИ В.П.Слободянин. В составе российской делегации был также доцент МФТИ Д.А.Александров, принимавший активное участие в подготовке команды к олимпиаде. Он прибыл на олимпиаду за счет поддержки спонсора – Русского фонда содействия образованию и науке.

Подготовка команды к олимпиаде началась более чем за год и проводилась на базе МФТИ.

Как и в прошлые годы, участникам олимпиады были предложены три теоретические задачи и одно экспериментальное задание. Каждая теоретическая задача оценивалась из 10 баллов, а экспериментальная – из 20 баллов. Таким образом, максимальное количество баллов, которое мог набрать каждый из участников олимпиады, равнялось 50.

По итогам выступления золотые медали получили 37 участников, серебряные – 46 и бронзовые – 51 участник олимпиады. Сравнительные результаты 20 лучших команд таковы:

№	Страна	Количество медалей			Сумма баллов
		золото	серебро	бронза	
1.	Китай	4	1		226,1
2.	Южная Корея	2	3		217,2
3.	Россия	3	1		216,1
4.	Япония	2	2	1	206,9
5.	США	2	3		204,4
6.	Индия	2	2		203,1
7–8.	Иран	2	2	1	202,4
7–8.	Франция	1	3	1	202,4
9.	Индонезия	1	3	1	200,9
10.	Венгрия	1	2	2	199,3
11.	Таиланд	1	2	2	198,5
12.	Вьетнам	2	2		197,5
13.	Германия		5		197,4
14.	Чешская Республика	2	1	2	197,1
15.	Сингапур	2	1	2	196,4
16.	Тайвань	1	2	2	194,8
17–18.	Украина	2		3	191,9
17–18.	Словакия	1	1	2	191,9
19.	Белоруссия	1	1	3	191,2
20.	Канада	2		2	190,3

Члены сборной команды России показали следующие результаты:

Участник	Теория	Эксперимент	Сумма баллов	Медаль
Мыльников Дмитрий	29,5	18,1	47,6	золото
Соловьева Ксения	29,0	17,7	46,7	золото
Котов Андрей	29,7	16,4	46,1	золото
Бельтюков Ярослав	29,3	13,7	43,0	серебро
Ефимов Сергей	26,2	6,5	32,7	грамота

Условия задач теоретического тура приведены ниже. Об экспериментальном туре скажем лишь, что целью задания было определение ширины запрещенной зоны тонкой полупроводниковой пленки, содержащей наночастицы окиси железа, и измерение толщины этой пленки. Для определения ширины запрещенной зоны нужно было исследовать оптический спектр пропускания и спектр поглощения пленки. Измерения выполнялись на гониометре – приборе, позволяющем с высокой точностью измерять углы отклонения пучков света при их прохождении сквозь дифракционную решетку.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1

Две звезды, вращающиеся вокруг их общего центра масс, образуют бинарную (двойную) звездную систему. Почти половина звезд нашей галактики – двойные звезды. С Земли нелегко распознать двойную природу большинства этих звездных систем, так как расстояние между звездами намного меньше расстояния от них до Земли, и, следовательно, телескоп не способен разрешить отдельные компоненты двойной звезды. Поэтому приходится использовать либо фотометрию, либо спектрометрию для наблюдения изменений в интенсивности или в спектре конкретной звезды, для того чтобы определить, является ли данная звезда двойной.

1. Фотометрия двойной звезды

Если бы мы находились в плоскости движения двух звезд, тогда одна из звезд в определенные моменты времени заслоняла бы другую (проходя впереди нее) и интенсивность всей системы изменялась бы со временем при наблюдении из нашей точки. Такие звезды называются эклиптическими двойными звездами.

Допустим, что две звезды движутся по круговым орбитам вокруг их общего центра масс с постоянной угловой скоростью ω и мы находимся точно в плоскости движения звезд. Предположим также, что температуры поверхностей звезд равны T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), а их радиусы составляют R_1 и R_2

соответственно ($R_1 > R_2$). Зависимость от времени суммарной относительной интенсивности света, измеренной на Земле, показана на рисунке 1. Тщательные измерения свидетельствуют о том, что минимальные интенсивности падающего от звезд света соответствуют 90% и 63% суммарной

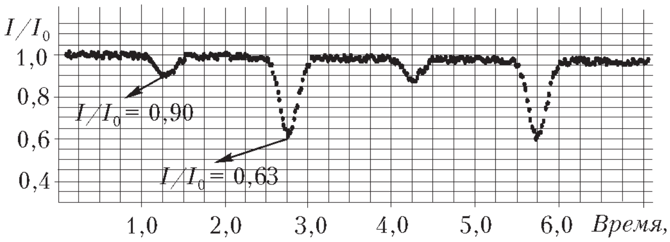


Рис. 1

интенсивности I_0, полученной от обеих звезд ($I_0 = 4{,}8 \cdot 10^{-9}$ Вт/м^2).

1.1. Найдите период орбитального движения звезд. Ответ выразите в секундах и округлите до двух значащих цифр. Найдите также угловую скорость вращения системы в рад/с. (0,8 балла)

Достаточно хорошим приближением для излучения, принимаемого от звезды, может служить излучение абсолютно черного тела в виде диска, радиус которого равен радиусу звезды. Поэтому мощность, принятая от звезды, пропорциональна AT^4, где A – площадь диска, T – поверхностная температура звезды.

1.2. С помощью графика, приведенного на рисунке 1, найдите отношения T_1/T_2 и R_1/R_2. (1,6 б.)

2. Спектрометрия двойной системы

В этой части вам предлагается вычислить астрономические свойства двойной звезды, используя ее экспериментальные спектрометрические данные.

Атомы поглощают и излучают свет определенных длин волн, характерных для данного атома. Поэтому наблюдаемый спектр звезды содержит линии поглощения, возникающие благодаря атомам, содержащимся в атмосфере звезды.

В спектре натрия имеется характерная желтая линия (D_1) с длиной волны 5895,9 Å (10 Å = 1 нм). Рассмотрим спектр поглощения атомарного натрия на этой длине волны для двойной звезды, о которой шла речь в предыдущей части. Из-за движения обеих звезд данной бинарной системы относительно наблюдателя частота (или длина волны) принимаемого нами излучения приобретает доплеровский сдвиг. Каждая из этих звезд имеет свою скорость и, соответственно, свой доплеровский сдвиг.

Требуются высоко точные измерения длины волны для наблюдения доплеровского сдвига, поскольку скорости звезд гораздо меньше, чем скорость света. Скорость центра масс бинарной системы, рассматриваемой в данном вопросе, гораздо меньше орбитальных скоростей звезд, поэтому все доплеровские сдвиги относятся к орбитальным скоростям звезд.

В таблице приведена зависимость от времени длин волн линий в спектре поглощения звезд двойной системы для линии D_1 натрия:

t (день)	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8
λ_1 (Å)	5897,5	5897,7	5897,2	5896,2	5895,1	5894,3
λ_2 (Å)	5893,1	5892,8	5893,7	5896,2	5897,3	5898,7

t (день)	2,1	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6
λ_1 (Å)	5894,1	5894,6	5895,6	5896,7	5897,3	5897,7
λ_2 (Å)	5899,0	5898,1	5896,4	5894,5	5893,1	5892,8

t (день)	3,9	4,2	4,5	4,8
λ_1 (Å)	5897,2	5896,2	5895,0	5894,3
λ_2 (Å)	5893,7	5896,2	5897,4	5898,7

Используя таблицу, ответьте на следующие вопросы.

2.1. Найдите орбитальную скорость каждой из звезд v_1 и v_2 (скорость света $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с). Релятивистские эффекты не учитывайте. (1,8 б.)

2.2. Найдите отношение масс звезд m_1/m_2. (0,7 б.)

2.3. Найдите расстояния r_1 и r_2 каждой из звезд бинарной системы от их общего центра масс. (0,8 б.)

2.4. Найдите расстояние r между звездами. (0,2 б.)

Учитывая, что гравитационная сила является единственной силой, действующей между звездами, дайте ответ на такой вопрос.

2.5. Найдите массу каждой звезды с точностью до одной значащей цифры. Гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м$^3 \cdot$ кг$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$. (0,2 б.)

3. Общая характеристика звезд

Для большинства звезд механизм генерации излучаемой энергии одинаков. Поэтому существует эмпирическое соотношение между массой звезды M и ее светимостью L, которая равна общей мощности излучения звезды. Это соотношение можно записать в виде $L/L_C = (M/M_C)^\alpha$, где $M_C = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца, $L_C = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт – светимость Солнца. Эта закономерность проиллюстрирована на рисунке 2 в двойном логарифмическом масштабе (звездочкой отмечено Солнце).

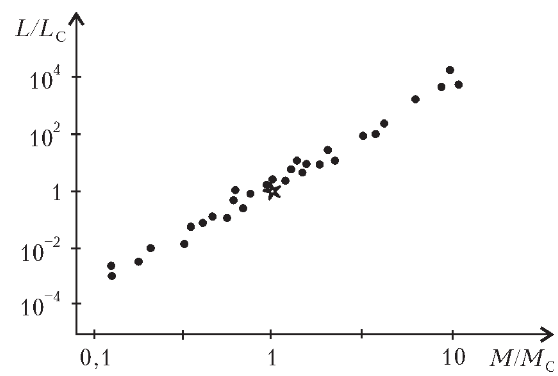


Рис. 2

3.1. Найдите показатель степени α с точностью до одной значащей цифры. (0,6 б.)

3.2. Пусть L_1 и L_2 – светимости звезд двойной системы, изучавшейся в предыдущей части. Найдите L_1 и L_2. (0,6 б.)

3.3. Определите расстояние d от нас до звездной системы в световых годах. Для определения этого расстояния вы можете использовать диаграмму, приведенную на рисунке 1. Один световой год равен расстоянию, которое свет проходит за один год. (0,9 б.)

3.4. Каково максимальное угловое расстояние θ между звездами при наблюдении с Земли? (0,9 б.)

3.5. Каким наименьшим диаметром D должен обладать объектив оптического телескопа, для того чтобы разрешить эти две звезды? (0,9 б.)

Задача 2

В данной задаче рассматривается упрощенная модель акселерометра (измерителя ускорения), который разработан для активирования воздушных подушек безопасности автомобиля во время столкновения. Для этого предлагается электромеханическая система, которая рассчитана таким образом, что когда ускорение превышает некоторое предельное значение, то один из электрических параметров системы – напряжение на одном из элементов цепи – достигает порогового значения, в результате чего надуваются (активируются) воздушные подушки. *Замечание:* действием силы тяжести в данной задаче следует пренебречь.

1. Рассмотрим конденсатор, состоящий из двух параллельных вертикальных пластин. Площадь каждой пластины A, расстояние между ними d (это расстояние значительно меньше размеров пластин). Одна из пластин прикреплена к стенке с помощью пружины жесткостью k, вторая пластина закреплена неподвижно. Считайте, что диэлектрическая проницаемость воздуха равна 1. Когда расстояние между пластинами равно d, пружина не деформирована. В этом состоянии электроемкость конденсатора равна $C_0 = \varepsilon_0 A/d$, где ε_0 – электрическая постоянная. Пластинам сообщают электрические заряды $+Q$ и $-Q$, после чего система переходит в состояние механического равновесия.

1.1. Найдите электрическую силу F, действующую на каждую пластину. (0,8 б.)

1.2. Обозначим через x смещение пластины, прикрепленной к пружине. Определите x. (0,6 б.)

1.3. Чему равна разность потенциалов U между пластинами в этом состоянии? Ответ выразите через параметры Q, A, d и k. (0,4 б.)

1.4. Пусть C – электроемкость конденсатора, равная по определению отношению заряда пластины к разности потенциалов между пластинами. Определите величину C/C_0 как функцию Q,A, d и k. (0,3 б.)

1.5. Чему равна полная энергия W, запасенная системой? Ответ выразите через Q, A, d и k. (0,6 б.)

На рисунке 3 приведена схема акселерометра. Тело массой M, соединенное с легкой проводящей подвижной пластиной, прикреплено к двум одинаковым пружинам жесткостью k.

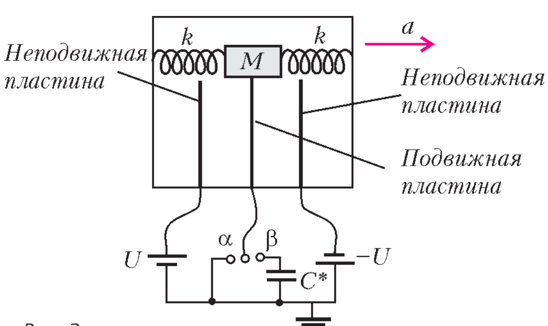


Рис. 3

Подвижная пластина может перемещаться между двумя неподвижными пластинами. Все три пластины одинаковы и их площади равны A. Таким образом, три пластины образуют два конденсатора. Как показано на рисунке , на неподвижных пластинах поддерживаются постоянные потенциалы U и $-U$ соответственно. Средняя пластина с помощью двухполюсного переключателя заземляется. Соединительные провода не препятствуют движению пластины, и в процессе движения все пластины остаются параллельными друг другу. Если система не ускоряется, то расстояния между подвижной и неподвижными пластинами равны d, причем это расстояние значительно меньше размеров пластин. Толщиной подвижной пластины можно пренебречь.

Переключатель может находиться в одном из двух положений α или β. Предположим, что рассматриваемое устройство движется вместе с автомобилем с постоянным ускорением. Будем считать, что в течение равноускоренного движения автомобиля пружины не колеблются и все компоненты системы находятся в равновесном положении, т.е. не движутся относительно друг друга и автомобиля.

Из-за наличия ускорения подвижная пластина смещается на определенное расстояние x от среднего положения между неподвижными пластинами.

2. Рассмотрите случай, когда переключатель находится в положении α, т.е. когда подвижная пластина соединена с землей проводом.

2.1. Найдите заряд каждого конденсатора как функцию величины x. (0,4 б.)

2.2. Найдите результирующую электрическую силу F, действующую на подвижную пластину, как функцию величины x. (0,4 б.)

2.3. Положим, что $d \gg x$, так что величинами порядка x^2 можно пренебречь по сравнению с d^2. Упростите предыдущий ответ, используя это приближение. (0,2 б.)

2.4. Запишите выражение для суммарной силы $F_{\text{с}}$, действующей на подвижную пластину (сумма электрических и упругих сил), в виде $-k_{\text{эф}}x$ и приведите формулу для величины $k_{\text{эф}}$. (0,7 б.)

2.5. Выразите величину постоянного ускорения a как функцию x. (0,4 б.)

3. Теперь будем считать, что переключатель находится в положении β, т.е. подвижная пластина соединена с землей через конденсатор емкостью C^* (который также изначально не был заряжен). Пусть подвижная пластина сместилась на расстояние x от своего центрального положения.

3.1. Найдите напряжение U^* на конденсаторе C^* как функцию смещения x. (1,5 б.)

3.2. Опять будем считать, что $d \gg x$, так что можно пренебречь величинами порядка x^2 по сравнению с d^2. Упростите ваш ответ в предыдущей части. (0,2 б.)

4. Необходимо подобрать параметры акселератора таким образом, чтобы воздушные подушки не активировались при нормальном торможении и активировались при столкновении для предотвращения удара головы водителя о лобовое стекло или руль.

Как следует из части 2, суммарная сила, действующая на подвижную пластину со стороны пружин и электрических полей, может быть представлена как сила упругости одной пружины с эффективной жесткостью $k_{\text{эф}}$. Таким образом, устройство эквивалентно пружинному маятнику с телом массой M и пружиной жесткостью $k_{\text{эф}}$, находящемуся в автомобиле, движущемся с постоянным ускорением a. Трением в системе можно пренебречь, значения параметров системы таковы: $d = 1{,}0$ см, $A = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м^2, $k = 4{,}2 \cdot 10^3$ Н/м, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл$^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)$, $U = 12$ В, $M = 0{,}15$ кг.

Замечание: в данной части задачи нельзя считать, что тело и пружины находятся в состоянии равновесия.

4.1. Используя эти данные, определите отношение электрической силы, найденной в разделе 2, к силе упругости пружин и покажите, что электрическими силами можно пренебречь по сравнению с силами упругости. (0,6 б.)

Несмотря на то, что вы не вычисляли электрические силы в случае, когда переключатель находится в положении β, можно показать, что и в этом случае электрические силы также являются малыми и ими можно пренебречь.

4.2. Пусть автомобиль, движущийся с постоянной скоростью, внезапно начинает тормозить с постоянным ускорением a. Чему равно в этом случае максимальное смещение подвижной пластины? Ответ дайте в виде формулы. (0,6 б.)

Переключатель находится в положении β, и устройство сконструировано так, что воздушные подушки активируются, когда напряжение на конденсаторе емкостью C^* достигает величины U^*. Нам необходимо, чтобы подушки не активировались, когда ускорение автомобиля не превышает ускорения свободного падения $g = 9,8$ м/с^2, но активировались при превышении этой величины.

4.3. Какой должна быть емкость конденсатора C^* для выполнения этих условий? (0,6 б.)

Будем считать, что воздушные подушки надуваются очень быстро, чтобы предотвратить удар головы водителя о лобовое стекло или руль. Предположим, что в результате столкновения автомобиль тормозит с постоянным ускорением, равным g, а голова водителя продолжает двигаться с постоянной скоростью.

4.4. Найдите время t_1 после начала торможения, через которое голова водителя ударится о руль. Расстояние до руля оцените самостоятельно. (0,8 б.)

4.5. Найдите время t_2 после начала торможения, через которое воздушные подушки активируются. Считайте, что они надуваются мгновенно. Сравните t_2 с t_1. Смогут ли воздушные подушки активироваться вовремя? (0,9 б.)

Задача 3

В физике соотношения между физическими величинами выражаются в виде равенств, левая и правая части которых должны быть однотипными, т.е. иметь одинаковые размерности. Скажем, нельзя, чтобы правая часть соотношения имела размерность длины, а левая часть – размерность времени. Используя этот факт, иногда возможно вывести искомое физическое соотношение, не решая задачу аналитически. Например, для того чтобы найти время, в течение которого объект падает с высоты h с постоянным ускорением g, необходимо, используя параметры задачи h и g, построить величину, имеющую размерность времени. Легко убедиться, что это можно сделать единственным образом: $T = a\sqrt{h/g}$. Заметим, что в это решение входит неопределенный безразмерный коэффициент a, который рассматриваемым методом определить нельзя. Этот коэффициент может быть равным 1, $1/2$, $\sqrt{3}$, π или любому другому вещественному числу. Такой метод получения физических соотношений называется методом анализа размерностей.

В методе анализа размерностей безразмерные коэффициенты не имеют важного значения. К счастью, в большинстве физических задач эти коэффициенты порядка 1, и их исключение не меняет порядок физической величины. Таким образом, анализ размерностей при решении поставленной выше задачи дает следующий ответ: $T = \sqrt{h/g}$.

Обычно размерность физической величины выражают через размерности четырех основных физических величин – M (масса), L (длина), T (время), и K (температура). Размерность произвольной величины x записывается в виде $[x]$. Например, размерности скорости v, кинетической энергии E_k и теплоемкости C_V выражаются так:

$$[v] = LT^{-1},\ [E_k] = ML^2T^{-2} \text{ и } [C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}.$$

1. Фундаментальные константы и анализ размерностей

1.1. Выразите размерности фундаментальных констант: постоянной Планка h, скорости света c, гравитационной постоянной G и постоянной Больцмана $k_Б$ через размерности длины, массы, времени и температуры. (0,8 б.)

Согласно закону Стефана–Больцмана, мощность излучения черного тела, которая определяется как суммарная энергия, излучаемая с единицы поверхности черного тела в единицу времени, равна $\sigma\theta^4$, где σ есть постоянная Стефана–Больцмана и θ – абсолютная температура черного тела.

1.2. Выразите размерность постоянной Стефана–Больцмана через размерности длины, массы, времени и температуры. (0,5 б.)

Постоянная Стефана–Больцмана не является фундаментальной физической постоянной, но ее можно выразить через фундаментальные физические постоянные h, c, G и $k_Б$, т.е. можно записать $\sigma = ah^\alpha c^\beta G^\gamma k_Б^\delta$. В этом соотношении a – безразмерная величина порядка единицы.

1.3. Найдите α, β, γ и δ, используя метод анализа размерностей. (1,0 б.)

2. Физика черных дыр

В этой части задачи попробуйте определить некоторые свойства черных дыр, используя метод анализа размерностей. В соответствии с теоремой Хокинга, «черные дыры не имеют волос», т.е. все физические характеристики черной дыры, которые рассматриваются в этой части, определяются только ее массой. Одной из важнейших физических характеристик черной дыры является площадь поверхности ее «горизонта событий». (Горизонт событий определяет границу черной дыры. Внутри области, определяемой горизонтом событий, гравитационное поле столь велико, что даже свет не может выйти за пределы данной области.)

Вам предлагается найти соотношение между массой m черной дыры и площадью A ее горизонта событий. Эта площадь зависит от массы черной дыры, скорости света и гравитационной постоянной. Как и в пункте 1.3, эта зависимость может быть представлена в виде $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$.

2.1. Используйте метод анализа размерностей для определения α, β, и γ. (0,8 б.)

Из сказанного следует, что площадь горизонта событий черной дыры увеличивается с ростом ее массы. С классической точки зрения, ничто не может покинуть пределы горизонта событий черной дыры, и поэтому во всех физических процессах площадь горизонта событий черной дыры может только увеличиваться. По аналогии со вторым законом термодинамики, Бекенштейн предложил считать, что энтропия S черной дыры пропорциональна площади ее горизонта событий, т.е. $S = \eta A$. Гипотезу можно сделать более правдоподобной, используя другой подход.

2.2. Используя термодинамическое определение энтропии $dS = dQ/\theta$, определите размерность энтропии. (Здесь dQ – количество теплоты, получаемое системой в результате теплообмена, θ – абсолютная температура системы.) (0,6 б.)

2.3. Выразите размерную постоянную η как функцию фундаментальных констант h, c, G и $k_Б$. (1,1 б.)

3. Излучение Хокинга

С помощью полуклассического приближения Хокинг показал, что, в отличие от классической точки зрения, черная дыра может излучать подобно черному телу, находящемуся при температуре, называемой температурой Хокинга.

3.1. Используя законы термодинамики и формулу $E = mc^2$, в которой энергия черной дыры выражается через ее массу, выразите температуру Хокинга θ_X черной дыры через ее массу и фундаментальные постоянные. Считайте, что черная дыра не совершает работы над окружающей средой. (0,8 б.)

3.2. Масса изолированной черной дыры изменяется вследствие излучения Хокинга. Используйте закон Стефана–Больцмана, чтобы найти зависимость скорости изменения массы от температуры Хокинга черной дыры, и выразите эту скорость через ее массу и фундаментальные постоянные. (0,7 б.)

3.3. Найдите время t^*, в течение которого изолированная черная дыра с массой m полностью испарится, т.е. потеряет всю свою массу. (1,1 б.)

С точки зрения термодинамики, черные дыры проявляют некоторые экзотические свойства. Например, теплоемкость черной дыры отрицательна.

3.4. Найдите теплоемкость черной дыры массой m. (0,6 б.)

4. Черная дыра и космическое фоновое излучение

Пусть черная дыра поглощает космическое фоновое излучение. Такое излучение, соответствующее излучению черного тела с температурой $\theta_ф$, заполняет всю вселенную. Объект, площадь поверхности которого A, в единицу времени поглощает энергию, равную $\sigma\theta_ф^4 A$. Поэтому черная дыра теряет энергию в виде излучения Хокинга и получает энергию в виде космического фонового излучения.

4.1. Выразите скорость изменения массы черной дыры через массу черной дыры, температуру космического фонового излучения и фундаментальные постоянные. (0,8 б.)

4.2. При достижении черной дырой определенной массы m^* скорость изменения ее массы окажется равной нулю. Найдите m^* и выразите ее через $\theta_ф$ и фундаментальные постоянные. (0,4 б.)

4.3. Используйте предыдущий ответ, для того чтобы заменить $\theta_ф$ в вашем ответе в части 4.1, и выразите скорость изменения массы черной дыры через m, m^* и фундаментальные постоянные. (0,2 б.)

4.4. Найдите температуру Хокинга черной дыры, находящейся в состоянии термодинамического равновесия с космическим фоновым излучениям. (0,4 б.)

4.5. Является ли данное равновесие устойчивым или нет? Почему? (Обоснуйте свой ответ математически.) (0,2 б.)

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Браслет–головоломка

(Начало см. на 4-й с. обложки)

Известно, что женщины разгадывают некоторые типы головоломок, например техно-психологические, лучше, чем мужчины. Это правило распространяется и на изобретение головоломок, отличающихся практичностью. Так, американка Марти Райс придумала браслет, который одновременно служит украшением и содержит в себе задачу-головоломку.

Этот браслоет нетрудно изготовить своими руками. Он состоит из замкнутой в кольцо шляпной резинки и нанизанных на нее шести одинаковых элементов в форме октаэдров (восьмигранников). Головоломка заключается в том, чтобы превратить браслет в выпуклый многогранник так, чтобы резинка прочно удерживала многогранник в собранном состоянии.

Скажем сразу, что единственный выпуклый многогранник, в который удается сложить детали головоломки, называется «ромбододекаэдр». Его грани – ромбы, а граней – 12. В классификации многогранников он относится к так называемым каталановым телам.

Разобравшись с формой собранной головоломки, перейдем к ее деталям. Они представляют собой октаэдры. Каждый из них состоит из двух одинаковых пирамидок, склеенных основаниями. Пирамидки специфические – их высота равна половине стороны квадратного основания. На соотношении размеров пирамидок (и соответственно, октаэдров) «держится» не только вся конструкция необычного женского украшения, но и способ его изготовления в домашних условиях. Это станет понятно, когда вы начнете делать ее своими руками.

Детали головоломки можно вырезать из деревянного бруска квадратного сечения. В этом случае вам придется рассчитать и точно соблюсти углы и размеры граней. Есть другой способ – «математический». Он основан на том, что из шести равных пирамидок с квадратными основаниями можно сложить куб, если высота пирамидок равна половине стороны основания. Следовательно, взяв деревянный кубик и распилив его по диагоналям сторон, вы получите шесть пирамидок, из которых можно склеить три октаэдра, – половина головоломки готова.

Теоретически для одного браслета достаточно двух кубиков, но в процессе изготовления некоторые пирамидки окажутся распиленными на четыре части и их придется склеивать. Поэтому проще взять три кубика, разрезать каждый на четыре трехгранные призмы и уже из них выпилить пирамидки.

Головоломка достаточно трудна в решении, но вам помогут рисунки, представленные на четвертой странице обложки.

А.Калинин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №1)

1. Вначале разложим монеты на две кучки: 8 монет и 4 монеты. За первое взвешивание узнаем, сколько тяжелых монет в большей кучке. Второе взвешивание будет зависеть от ответа на этот вопрос. Рассмотрим возможные варианты.

1) В большей кучке 6 тяжелых монет (значит, в меньшей кучке все монеты легкие). Вторым взвешиванием определим, сколько тяжелых монет среди произвольных двух монет большей кучки. Если 0, то одна из этих двух монет и любая одна монета из оставшихся шести монет большей кучки – искомые, если 1, то эти две монеты – искомые, а если 2, то искомыми являются любая из этих двух монет и любая монета из меньшей кучки.

2) В большей кучке 5, 4 или 3 тяжелые монеты, соответственно, в меньшей кучке 1, 2 или 3 тяжелые монеты. Для второго взвешивания возьмем любые две монеты из меньшей кучки. Несложно определить, как по результатам второго взвешивания найти нужные две монеты из меньшей кучки.

3) В большей кучке 2 тяжелые монеты (соответственно, в меньшей кучке 4 тяжелые монеты). Для второго взвешивания возьмем 6 монет из большей кучки. Если среди них 0 тяжелых монет, то годится любая из них вместе с любой монетой из меньшей кучки, если 1, то подойдут оставшиеся две монеты из большей кучки, а если 2, то искомыми монетами являются любая монета из оставшихся двух монет большей кучки и любая монета из меньшей кучки.

2. Знак третьей разности отрицателен.

Пусть три числа x, y, z таковы, что $xy - (x + y) < 0$, $yz - (y + z) > 0$. Запишем исходные условия так:

$(x-1)(y-1)-1<0$, $(y-1)(z-1)-1>0$.
Поскольку числа x, y натуральные, то из первого условия следует, что либо $x=1$, либо $y=1$. Из второго же следует, что $y>1$. Значит, $x=1$. Поэтому $(x-1)(z-1)-1<0$, т.е. $xz-(x+z)<0$.

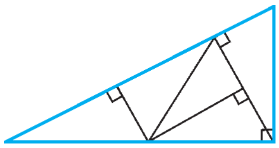


Рис. 1

3. См. рис.1, на котором указано разбиение исходного треугольника на 5 равных прямоугольных треугольников.

4. *Ответ*: $x=1$, $y=1$. Так как левая часть делится на 3, то в ней четное число слагаемых, т.е. $x=2n-1$, где n – некоторое натуральное число. Перепишем исходное равенство так:

$$(1+2)\left(1+2^2+2^4+\ldots+2^{2n-2}\right)=3^y,$$

откуда $1+2^2+\ldots+2^{2n-2}=3^{y-1}$. Если $y-1>0$, то левая часть нового равенства делится на 3, значит, и число слагаемых слева делится на 3. В таком случае левая часть раскладывается на два множителя, один из которых равен $1+2^2+2^4$. Это число должно быть натуральной степенью тройки – противоречие. Следовательно, $y=1$, но тогда и $x=1$.

5. *Ответ*: 7 человек.
Из первых заявлений следует, что никакие два рыцаря и никакие три лжеца не могли сидеть подряд. Значит, рыцари составляли не более половины и не менее одной трети от общего числа участников застолья. Таким образом, рыцарей было 7, 8 или 9 человек.
Заявления оставшихся за столом после ухода отщепенцев возможны в двух случаях:
1) все они рыцари (тогда рыцарем был и последний из ушедших);
2) все они лжецы (тогда последний из ушедших был лжецом).
Заявления отщепенцев также возможны в двух ситуациях:
1) все они лжецы;
2) лжецы сидели по одному, а рыцари по двое (т.е. рыцарей среди отщепенцев было в два раза больше, чем лжецов).
Допустим, на своих местах остались сидеть только рыцари. Тогда последний из ушедших тоже был рыцарем. Значит, среди ушедших должно было быть две трети рыцарей. Но это противоречит тому, что их изначально было менее половины. Следовательно, на своих местах остались сидеть только лжецы, а среди ушедших было ровно вдвое больше рыцарей, чем лжецов. А это возможно лишь в том случае, когда изначально рыцарей было 8. Таким образом, ушли все 8 рыцарей и 4 лжеца, а на своих местах остались сидеть 7 лжецов.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 5 за 2007 г.)

6. Можно. Вот требуемое распределение (буквой М обозначен мальчик, буквой Д – девочка, каждый ряд следует замкнуть в круг):

М М М М М М М М Д Д Д Д Д Д Д Д
М М М М Д Д Д Д М М М М Д Д Д Д
М М Д Д М М Д Д М М Д Д М М Д Д
М Д М Д М Д М Д М Д М Д М Д М Д

7. Нет. Предположим, что существуют такие целые числа x и y, что $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=y^3$, или $3x^2+2=y^3$. Поскольку квадрат любого целого числа можно представить в виде $3k$ или $3k+1$, где k – целое, то имеет место равенство $9l+2=y^3$ или $9l+5=y^3$, где l – целое. Значит, y^3 при делении на 9 должно давать остаток 2 или 5, но это невозможно.

8. При пересечении двух полос одинаковой ширины образуется параллелограмм, причем обе его высоты одинаковы. А так как площадь параллелограмма есть произведение стороны на высоту, то отсюда следует, что и все стороны параллелограмма одинаковы. Следовательно, этот четырехугольник – ромб (рис.2). Доказательства всех утверждений построены на том, что диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

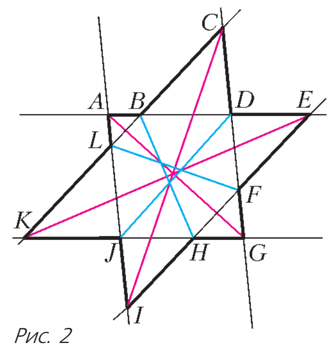


Рис. 2

а) Здесь надо доказать, что три красных отрезка пересекаются в одной точке. В ромбе $ADGJ$ AG – биссектриса $\angle IAE$. Аналогично, EK – биссектриса $\angle AEI$ и IC – биссектриса $\angle EIA$. Таким образом, отрезки AG, EK и IC – биссектрисы внутренних углов треугольника AEI, поэтому они пересекаются в одной точке.
б, в, г) Здесь надо доказать, что каждый красный отрезок пересекается в одной точке с двумя синими отрезками. Доказательство совершенно аналогично для каждого случая, поэтому выполним доказательство на примере пункта б).
Опять же, рассматривая получившиеся ромбы, мы получаем, что AG – биссектриса $\angle IAE$, а также LF – биссектриса $\angle BLI$ и BH – биссектриса $\angle LBE$. Таким образом, отрезки AG, LF и BH – биссектрисы одного внутреннего и двух внешних углов треугольника ALB, поэтому они пересекаются в одной точке.

9. Пусть $a_1<a_2<\ldots<a_{50}$ – красные числа, $b_1<b_2<\ldots<b_{50}$ – синие числа. Тогда $b_1=101-a_{50}$, $b_2=101-a_{49}$,… …, $b_{50}=101-a_1$. Последовательно используя эти равенства, проверяем верность двух утверждений:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{50}^2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{50}^2,$$
$$a_1+2a_2+\ldots+50a_{50}=b_1+2b_2+\ldots50b_{50},$$

после чего легко проверяется верность требуемого равенства:

$$(a_1-1)^2+(a_2-2)^2+\ldots+(a_{50}-50)^2=$$
$$=(b_1-1)^2+(b_2-2)^2+\ldots+(b_{50}-50)^2,$$

ибо a_i-i – это вес a_i, b_i-i – это вес b_i.

10. а) Да. Например, в таблице на рисунке 3 сумма чисел в любом квадрате 3×3 равна −2,5, а в любом квадрате 5×5 она равна 1.

−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	5,5	−1	−1	5,5	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	5,5	−1	−1	5,5	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1

Рис. 3

1	2	3	3	3	2	1
2	4	6	6	6	4	2
3	6	9	9	9	6	3
3	6	9	9	9	6	3
3	6	9	9	9	6	3
2	4	6	6	6	4	2
1	2	3	3	3	2	1

Рис. 4

б) Нет. В квадрате 7×7 рассмотрим всевозможные суммы чисел, принадлежащие квадратам 3×3. Поскольку сумма чисел в каждом квадрате 3×3 отрицательная, то и сумма S_1 всех таких сумм является отрицательным числом. Обратим внимание, что некоторые числа квадрата 7×7 являются общими для разных квадратов. А значит, повторяются в разных рассматриваемых суммах чисел квадратов 3×3. Напишем в каждой клетке квадрата 7×7 число, равное количеству таких повторений – получим таблицу изображенную на рисунке 4.
Аналогично, в квадрате 7×7 рассмотрим всевозможные суммы чисел, принадлежащие квадратам 5×5. Поскольку сумма чисел в каждом квадрате 5×5 положительная, то и сумма S_2

всех таких сумм является положительным числом. Некоторые числа квадрата 7×7 являются общими для разных квадратов, а значит, повторяются в разных рассматриваемых суммах чисел квадратов 5×5. Напишем в каждой клетке квадрата 7×7 число, равное количеству таких повторений – получим таблицу, полностью совпадающую с предыдущей таблицей.

Это приводит к противоречию, так как из совпадения таблиц следует равенство сумм S_2 и S_1, чего не может быть, поскольку эти суммы имеют разные знаки.

ДВЕ ЗНАМЕНИТЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Допустим, точки $A(-n;0)$, $n\in\boldsymbol{N}$, $B(0;1)$, $C(1;1)$ – вершины примитивного треугольника ABC. Пусть B' – точка, симметричная точке B относительно точки A. Треугольник $AB'C$ примитивен, а длины всех его сторон больше n.

2. Пусть наибольший угол многоугольника находится при вершине A. Если этот угол не превосходит 180°, то многоугольник выпуклый и любая его диагональ будет внутренней. Если он больше 180°, то лампочка, помещенная в вершину A, освещает не менее двух отрезков на сторонах многоугольника. Поворачивая луч вокруг точки A от одного освещенного отрезка к другому, мы неизбежно натолкнемся на одну из вершин многоугольника.

3. *Указание.* Если все вершины многоугольника имеют рациональные координаты, то можно найти его гомотетичную копию, вершины которой имеют целые координаты.

4. *Указание.* Проверьте сначала равенства $F = N$, $V = N_i + N_e$, $2E = 3N + N_e$.

5. Проводя внутренние диагонали в каждом из многоугольников, мы получим новую карту, состоящую только из треугольников. Для новой карты величина $V - E + F$ (эйлерова характеристика) равна аналогичной величине для исходной карты (при проведении одной диагонали число ребер и число многоугольников увеличивается на единицу). Для доказательства формулы Эйлера теперь остается заметить, что, «отрезая» один треугольник за другим, мы будем получать карты с той же характеристикой. При этом каждый раз следует выбирать треугольник, который граничит с внешностью карты и удаление которого не приводит к распаду карты на части (докажите, что такой треугольник всегда существует). При «отрезании» треугольника удаляется одна, две или три стороны треугольника. В каждом из трех случаев эйлерова характеристика сохраняется. Для одного треугольника формула Эйлера, очевидно, справедлива, и, тем самым, она справедлива и для произвольной карты.

6. Так можно получить любой примитивный треугольник (с точностью до параллельного переноса). Для доказательства достаточно проверить, что любой примитивный треугольник можно после нескольких прыжков перевести в треугольник, образованный какими-то тремя вершинами единичного квадрата. Действительно, отразив одну вершину относительно вершины тупого угла (а примитивный треугольник не может быть остроугольным), мы сможем получить треугольник, в котором максимальная сторона имеет меньшую длину.

7. Пусть M – узел решетки, лежащий внутри данного треугольника ABC. Отрезки MA, MB, MC разбивают данный треугольник на три примитивных и, тем самым, равновеликих. Отсюда легко заключить, что M – точка пересечения медиан треугольника ABC.

8. Пусть A, B, C, D, E – пять последовательных вершин выпуклого многоугольника. По условию треугольники ABE, ABD и ABC – примитивные. Поэтому точки E, D и C одинаково удалены от прямой AB и, следовательно, лежат на одной прямой, параллельной AB. Противоречие.

9. *Указание.* В качестве точки C можно взять любую из точек решетки, находящихся на наименьшем расстоянии от прямой AB. Это расстояние будет равно $1/d$, так как площадь любого примитивного треугольника равна $1/2$.

10. *Указание*. При перепрыгивании кузнечик из упражнения 6 остается в пределах одной и той же подрешетки.

11. $n = 8$, и условию задачи удовлетворяют, например, целочисленные точки $(0;0)$, $(0;3)$, $(3;1)$, $(3;4)$, $(1;0)$, $(4;3)$, $(1;1)$, $(7;4)$. *Указание.* Заметим, что если $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;y_3)$ – какие-то три точки на плоскости, то центр тяжести треугольника с вершинами в этих точках имеет координаты $\left((x_1+x_2+x_3)/3;(y_1+y_2+y_3)/3\right)$.

Предположим, что существует 9 точек, удовлетворяющих условию задачи. Разобьем множество всех целочисленных точек на непересекающиеся классы, к каждому из которых отнесем точки вида $(3k+r_1;3m+r_2)$, где k, m, r_1, r_2 – целые числа и $0\le r_1$, $r_2\le 2$. По предположению, ни в одном из классов не содержится трех точек из 9 указанных. Поэтому среди этих 9 точек имеется не менее 5 точек из разных классов. Среди этих пяти точек, в свою очередь, нет трех с одним и тем же значением r_1. Поэтому в двух из этих групп содержится по две точки, а в третьей – одна.

Для получения противоречия можно выбрать точку из третьей группы и рассмотреть возможности выбора пары точек из двух других групп.

12. Ломанная проходит через 64 узла решетки и не содержит узлов внутри. Поэтому, по формуле Пика, она ограничивает многоугольник площади 31.

13. Пусть квадрат $n\times n$ накрыл m точек целочисленной решетки. Рассмотрим многоугольник M, который является выпуклой оболочкой точек, накрытых квадратом. Для него $N_i + N_e = m$. По построению, площадь многоугольника M не превосходит n^2, а его периметр не превосходит $4n$; значит, и $N_e\le 4n$. Пользуясь этими оценками и формулой Пика, находим $m = N_i + N_e = [M] + N_e/2 + 1\le n^2+2n+1\le(n+1)^2$.

14. *Указание.* По формуле Пика площадь искомого параллелограмма равна $1/(mn+1)$ в первом случае, и $1/(mn-1)$ во втором.

15. *Указание.* По формуле Пика площадь заштрихованного треугольника в 7 раз меньше площади исходного треугольника (изобразите соответствующую решетку).

16. *Указание.* Нарисуйте данный квадрат на целочисленной решетке так, чтобы его вершины имели координаты (0;0), (0;12), (12;0), (12;12), и примените формулу Пика.

17. Предположим, что ломаная внутри многоугольника проходит через k узлов решетки. Тогда $N_i = N_{i,1} + N_{i,2} + k$, $N_e = N_{e,1} + N_{e,2} - 2k - 2$. Подставляя эти равенства в формулу $f(P) = f(P_1) + f(P_2)$, получаем $c = ak - 2b(k+1)$. Так как k может быть любым (хотя достаточно предъявить примеры, когда $k = 0$ и $k = 1$), то $a = 2b$ и $c = -2b$.

18. *Указание.* С помощью формулы Пика утверждение задачи сводится к проверке равенства $N_e(2P) = 2N_e(P)$.

19. *Указание.* Рассмотрите точки вида $(n;n^2)$.

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 10 км/ч, 30 км/ч. **2.** $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$. **3.** $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n$; $n\in\boldsymbol{Z}$.

4. $[1;2)\cup\left(2+\sqrt{3};6\right]$. **5.** $\pi-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{145}}$. **6.** $(3;4)$.

Вариант 2

1. $-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **2.** $\dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{2}{3}$. **3.** $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \ \pm\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}$.

4. 10%. **5.** $R^2\sin 2\beta\cos^2\beta$. **6.** $1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, 1.

Вариант 3

1. 5. **2.** 3 часа.

3. Пересечение четырехугольника и пятиугольника будет выпуклым многоугольником, каждая сторона которого лежит на одной из сторон исходных многоугольников. При этом на каждой из сторон исходных многоугольников может лежать не более одной стороны многоугольника-пересечения. Значит, пересечение четырехугольника и пятиугольника может иметь не более девяти сторон.

4. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{6}$; $1-\dfrac{\pi}{2}$.

5. $\sqrt{4R^2-a^2}+4\sqrt{R^2+2a^2}$. **6.** $\left(\dfrac{1+\log_4 3}{2};\dfrac{1-\log_4 3}{2}\right)$.

7. *Указание.* Если число делится на 121, то оно делится и на 11. Из равенства

$$A_n = n^2+5n+53 = (n+8)(n-3)+77$$

следует, что если A_n делится на 11, то либо $n+8=11k$, либо $n-3=11l$, где k и l – некоторые целые числа. Подставляя $n=-8+11k$ в выражение для A_n, получим

$$A_n = 121k(k-1)+77.$$

Осталось заметить, что 77 не делится на 121. Аналогично рассматривается второй случай.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v=\sqrt{gR\,\mathrm{tg}\,\alpha}\approx 31{,}6$ м/с. **2.** $v=\dfrac{(m_1-m_2)v_1}{m_1+m_2}=0{,}4$ м/с.

3. Уменьшится в $\dfrac{\varepsilon}{2}=1{,}5$ раза. **4.** $\Delta U=\dfrac{3}{2}A=6930$ Дж.

5. $I=\dfrac{NS}{R}\dfrac{\Delta B}{\Delta t}=5$ мкА.

Вариант 2

1. $l=gR_3^2\left(\dfrac{1}{v_2^2}-\dfrac{1}{v_1^2}\right)\approx 360$ км.

2. $p=Mv\,\mathrm{tg}\,\alpha\approx 578$ кг·м/с. **3.** $x=\dfrac{l}{n^3}=0{,}002$ м.

4. $t=\dfrac{t_1+2t_2}{3}=60$ °С. **5.** $F=IB\sqrt{L_1^2+(L-L_1)^2}=2\cdot10^{-2}$ Н.

Вариант 3

1. $a_{\text{c}}=\dfrac{v_{\text{c}}v_{\text{л}}\sin\alpha}{L}\approx 0{,}90$ м/с^2. **2.** $a=\dfrac{g(m_1-m_2)}{m_1+m_2}=2$ м/с^2.

3. $\Delta h_1=\dfrac{\rho_{\text{в}}\Delta h}{\rho_{\text{c}}}=10$ мм. **4.** $\Delta E=12mv^2$.

5. $T=\dfrac{(C_V+R)T_0}{C_V}=\dfrac{5}{3}T_0$. **6.** $I_0=\dfrac{I}{89}=0{,}1$ А.

7. $B=\dfrac{\mu mg}{Il}\approx 0{,}067$ Тл. **8.** $F=\dfrac{LR}{r_2-r_1}=18$ см.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $a=\dfrac{s_1-s_2}{\tau^2}=4$ м/с^2. **2.** $k=\pi r^2\rho g\approx 201$ Н/м.

3. $v=\sqrt{2gl\dfrac{(M/m)-1}{(M/m)+1}}=\sqrt{gl}=2$ м/с. **4.** $\dfrac{v_{\text{в}}}{v_{\text{к}}}=\sqrt{\dfrac{M_{\text{в}}}{M_{\text{к}}}}=4$.

5. $Q=\dfrac{5}{2}pV(n-1)=25$ кДж.

6. $C=\dfrac{q\sqrt{n}}{U}=1$ нФ. **7.** $r=P_{\text{к}}\left(\dfrac{U}{P}\right)^2\approx 0{,}22$ Ом.

8. Увеличилась в $\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\approx$ 1,15 раза.

9. $H=\left(\dfrac{L}{l}-1\right)h\approx 15$ м. **10.** $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}=\dfrac{A_1}{A_2}\approx 2$.

Вариант 2

1. $v_0=\sqrt{\dfrac{gL}{2\sin\alpha}}\cos\alpha$.

2. $F=\dfrac{\mu mg}{2(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)}$; если $\mu\ge\mathrm{tg}\,\alpha$, то затянуть доску под балку невозможно.

3. $v_0=\sqrt{2\left(\dfrac{E_{\text{к}}}{m}+gh\right)}=20$ м/с. **4.** $\rho=\dfrac{2M}{V}=0{,}1$ кг/м^3.

5. $p_2=p_1\dfrac{V_3-V_1}{V_3-V_2}$. **6.** $\dfrac{T_{12}}{T_{23}}=3$. **7.** $r=\dfrac{U_1R}{U-U_1}=90$ кОм.

8. $\varepsilon=\dfrac{LdI_m^2}{\varepsilon_0SU_m^2}$. **9.** $F=\dfrac{\Gamma}{\Gamma+1}d=15$ см.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Э.БАУМАНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 200 м. **2.** $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6}$.

3. $\dfrac{1}{4}$. **4.** $[0;1)\cup\left(1;\dfrac{25}{9}\right)$. **5.** 2.

6. $x=4\dfrac{2a-1}{a}$ при $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$; $x=-1$ при $a=0$;

$x=-\left(\dfrac{-2+2\sqrt{1+a-2a^2}}{a}\right)^2$ при $a\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$. **7.** $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Вариант 2

1. 18 дней, 24 дня. **2.** $\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{8}$. **3.** 4.

4. $(0;2)\cup(4;6)$. **5.** $12\sqrt{6}$.

6. $x_{1,2}=\dfrac{1-a\pm\sqrt{3-2a-a^2}}{2}$ при $a\in\left(-3;-\sqrt{2}\right)$;

$x_1=\dfrac{1-a+\sqrt{3-2a-a^2}}{2}$, $x_2=-1-\sqrt{2-a^2}$ при $a\in(-1;1]$;

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2-a^2}$ при $a\in\left(1;\sqrt{2}\right)$. **7.** $\sqrt{6}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $I=\dfrac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2}{R+r_1+r_2}$; $[I]=$ А, $[\mathscr{E}]=$ В, $[R]=$ Ом.

2. $A=\nu RT_1\dfrac{\alpha-1}{\alpha}=2216$ Дж. **3.** $\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=1840$.

4. $k=\dfrac{d}{\lambda}=3$.

5. $\mu_2 = \dfrac{\cos\alpha - 2\mu_1 \sin\alpha}{\mu_1 \cos\alpha} = 0{,}54$. *Указание*: запишите условия равновесия стержня для сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси и для моментов сил относительно точки опоры о горизонтальную плоскость.

6. $L = \dfrac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu m g L_0}$. *Указание.* Воспользуйтесь законом сохранения энергии.

7. $T = 5mg$. *Указание.* Система совершает гармонические колебания; сила натяжения нити максимальна, когда груз массой m_2 находится в крайнем нижнем положении.

Вариант 2

1. $I = U\dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$; $[I]$ = А, $[U]$ = В, $[R]$ = Ом. **2.** $p = F_0 t_0$.

3. См. рис.5; газ получает тепло извне на участках *1–2* и *2–3*.

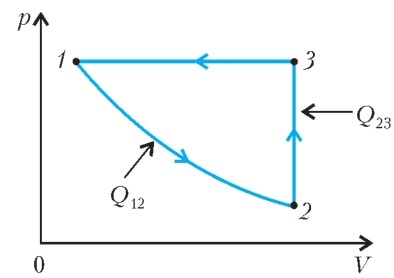


Рис. 5

4. См. рис.6. **5.** $m = \dfrac{2}{3}\rho\pi R^2 H$. **6.** $A = \dfrac{2\mu m g}{k}$.

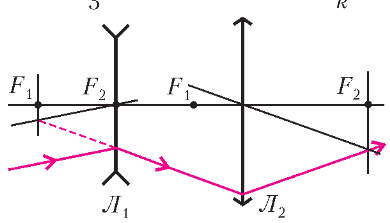


Рис. 6

7. $\varphi_A - \varphi_C = \dfrac{BI}{neh}$ (здесь e – заряд электрона).

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

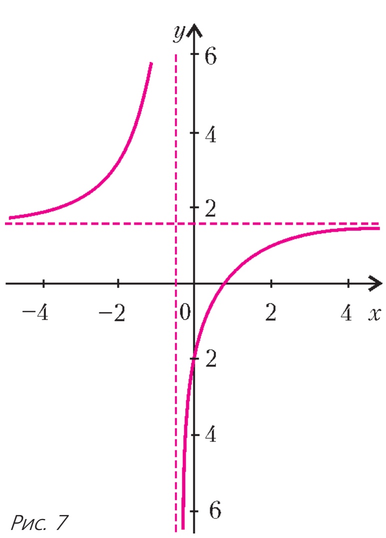


Рис. 7

1. Две ветви гиперболы (рис.7) имеют вертикальную асимптоту $x = -1/2$ и горизонтальную $y = 3/2$. Точки пересечения с осями x и y равны $2/3$ и -2 соответственно.

2. $f'(x) = 9x^2 - 24x^3 - \dfrac{1}{x\ln 10} - \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$, $x \in (0;3)$.

3. $y_{\min} = -1$, $y_{\max} = \dfrac{5}{4}$. *Указание:* наибольшие и наименьшие значения исходной функции следует искать либо в граничных точках промежутка $x \in [-\pi; 2\pi/3]$, либо во внутренних точках этого промежутка, в которых обращается в ноль производная.

4. В случае если $a \le -2$, пересечение пусто (рис.8,*а*). Поэтому решение существует лишь при $a(-2;0)$ (рис.8,*б*),

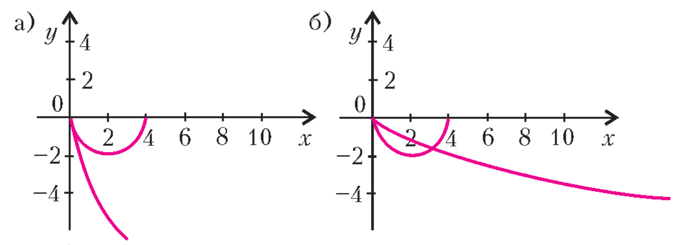


Рис. 8

это область между прямой $y = 0$ (сверху), частью параболы (снизу – слева) и дугой окружности (снизу – справа). Площадь этой фигуры считаем как сумму половины площади кругового сегмента (ограничена прямой $y = 0$, перпендикуляром на ось абсцисс, проведенным из точки пересечения полуокружности и параболы, и дугой окружности) и площади фигуры, заключенной между тем же перпендикуляром, прямой $y = 0$ и параболой:

$$S = 2\left(\arccos\frac{2-a^2}{2} - \frac{2-a^2}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2-a^2}{2}\right)^2}\right) - \frac{2a\left(4-a^2\right)^{3/2}}{3} .$$

5. $y = \dfrac{2}{x_0^2}x - \dfrac{4}{x_0}$, где $x_0 = -2 \pm \sqrt{10}$.

6. Стороны: $\dfrac{36}{5}$, 6, $6\dfrac{3\sqrt{3}-4}{5}$; углы: $\dfrac{\pi}{6}$, $\pi - \arcsin\dfrac{3}{5}$, $\arcsin\dfrac{3}{5} - \dfrac{\pi}{6}$.

Вариант 2

1. См. рис.9 (вертикальная асимптота $x = -2$); точки пересечения с осями x и y: $-\dfrac{5}{3}$ и $\log_3 6$.

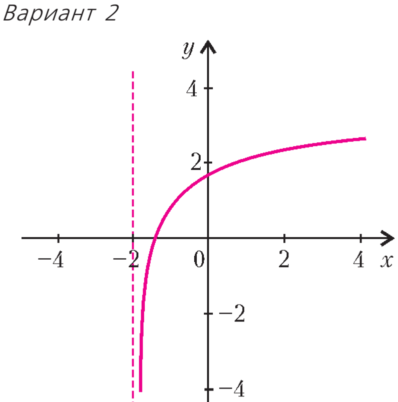


Рис. 9

2. $f'(x) = -9x^2 - 30x^4 + \dfrac{1}{x\ln 3}$ при $dx > 0$.

3. $y_{\min} = -3\pi$, $y_{\max} = 2\pi$.

4. $\dfrac{16}{3}$. **5.** $\dfrac{-41 \pm 3\sqrt{30}}{17}$.

6. 16; $2\sqrt{\dfrac{21}{5}}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $\Delta l = \dfrac{2v}{3}\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$. **2.** $h = \dfrac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}$.

3. $k = \dfrac{q^2\left(4l_1^2 - l_2^2\right)}{4\pi\varepsilon_0 l_1^2 l_2^2 \left(l_2 - l_1\right)}$. **4.** $x = \dfrac{l\left(T_0 - T_1\right)}{(n+1)\left(T_1 + nT_0\right)}$.

5. $t = \dfrac{3l_0^2}{2vR}$.

Вариант 2

1. Ускорение направлено вертикально вниз и равно $a = g - \dfrac{F}{m} = 5$ м/с^2 .

2. $\Delta x = \dfrac{ad}{d-F} = 3$ см. **3.** $Q = \dfrac{3}{2}\nu RT\left(n^2 - 1\right)$.

4. $v_1 = \sqrt{u^2 - v^2\cos^2\alpha} - v\sin\alpha$. **5.** $L_2 = \dfrac{L}{2} + L_1$.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $R = \dfrac{I_1 r}{I_2 - I_1}$. **2.** $qE = qvB,\ \dfrac{mv^2}{R} = qvB,\ E = \dfrac{qB^2R}{m}$.

3. Пробирка начнет тонуть, когда ее верхний край сравняется с уровнем жидкости, при этом объем вытесненной жидкости будет равен объему воздуха в пробирке. В этот момент пробирка находится в равновесии, и сила Архимеда равна силе тяжести пробирки: $\rho gSx = mg$, где x – высота столбика жидкости. Когда пробирка начнет всплывать со дна, также имеет место равновесие сил: сила Архимеда снова равна силе тяжести пробирки. Следовательно, объемы воздуха в эти два момента равны. Из уравнения состояния $pV = \nu RT$ следует, что отношение температур равно отношению давлений. Но $p_1 = p_0 + \rho gx$, а $p_2 = p_0 + \rho g(H - L + x)$. Тогда

$$T_2 = T_1\frac{\left(p_0 + \rho g(H-L)\right)S + mg}{p_0S + mg}.$$

4. Когда один полоз наедет на выступ, сани станут поворачиваться вокруг другого полоза. Незначительная высота выступа сама по себе не приведет к перевороту, но при наезде на выступ появится вертикальная скорость «вращения» $u = vh/L$, где v – искомая скорость саней. Кинетическую энергию вращения можно оценить как $mu^2/8$ (замена массы саней точечной массой, находящейся посередине между полозьями). Если H – максимальная высота подъема центра масс при повороте, то условие переворота можно записать в виде $mu^2/8 = mgH$. Высота H в нашей модели – это половина расстояния между полозьями, таким образом,

$$v = \frac{L}{h}\sqrt{8gH}.$$

При $H = 0{,}3$ м $v \approx 13$ м/с ≈ 37 км/ч.

5. Свет от источника, проходя через два отверстия пластины, образует на экране два светлых пятна. От второго источника также образуется два пятна. Если центры отверстий и источники находятся в одной плоскости, то центры четырех пятен лежат на прямой – на пересечении этой плоскости и экрана. При определенном положении экрана центры ближайших пятен совпадут. Тогда мы видим три пятна, центральное пятно – двойной яркости. При повороте пластины на $90°$ центры пятен от одного источника лежат на отрезке, параллельном оси, проходящей через центры отверстий. Центры пятен от одного отверстия и двух источников образуют отрезок, параллельный отрезку, соединяющему источники. Таким образом, в промежуточном случае конфигурация пятен образует параллелограмм.

Вариант 2

1. $h = H\sin^2\alpha$.

2. Луч, проходящий через центр линзы, не меняет направления. Поэтому получаем

$$d = \frac{fh}{H-h},\quad \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},\quad F = \frac{fh}{H}.$$

Если взять луч, идущий параллельно оси, то он пройдет через фокус и изображение. Пересечение этого луча с главной оптической осью дает положение фокуса. Тогда из подобия треугольников сразу получаем ответ.

3. Чтобы расстояния между частицами были одинаковы, перемещения частиц должны соотноситься как 1 : 3. Так же тогда относятся скорости: $V = 3v$ и ускорения: $A = 3a$. Из второго закона Ньютона и выражения для кулоновских сил имеем

$$MA = \frac{kq^2}{r^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right),\quad ma = \frac{kq^2}{4r^2},\ \text{откуда}\ M = \frac{49}{27}m.$$

Из закона сохранения энергии (для конечных скоростей)

$$mv^2 + MV^2 = \frac{kq^2}{r}\left(3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

находим

$$v = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{k}{rm}},\quad V = \frac{3q}{2}\sqrt{\frac{k}{rm}}.$$

4. В системе отсчета спутника направления относительных скоростей молекул лежат в конусе, для угла α между образующей и осью которого $\sin\alpha = u/v$, где u – величина скорости молекул относительно Земли, а v – скорость спутника. Для спутника в форме шара $u/v = 1/2$, для околоземной орбиты $v \approx 8$ км/с, поэтому $u \approx 4$ км/с. (Или, грубее, молекулы залетают сбоку: $t = R/u,\ L \approx 2R = vt = vR/u$.) Тот же порядок скорости получается для диска или цилиндра.

5. При резком подъеме, в отличие от случая медленного подъема, вода не успевает «затекать» под дощечку, и здесь резко понижается давление. Из-за разницы между давлением под дощечкой и атмосферным давлением возникает дополнительная тормозящая сила (по сравнению с «сухой» дощечкой). Соответствующая проволочка сильнее растягивается и рвется. Можно также сказать, что резко сдвинувшаяся дощечка увлекает за собой воду (приблизительно куб, прилегающий снизу к ее поверхности), так что масса, которую надо поднимать, заметно возрастает.

Вариант 3

1. $t = \dfrac{3v}{4g}$. **2.** Сила нормального давления N одного цилиндра на другой образует угол β с дном коробки такой, что $\sin\beta = (R-r)/(R+r)$. Из равновесия правого цилиндра имеем $mg\sin\alpha = N\cos\beta$ (проекции сил вдоль дна коробки). Для левого цилиндра (проекции сил вдоль стенки) получаем $Mg\cos\alpha = N\sin\beta$. Отсюда находим

$$\frac{M}{m} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{(R-r)\operatorname{tg}\alpha}{2\sqrt{Rr}}.$$

3. В системе покоящейся спицы скорость бусинки можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{mu^2}{2} = kq^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

В исходной системе отсчета работа равна сумме приращений кинетической и потенциальной энергии:

$$A = \left(\frac{m(v+u)^2}{2} - \frac{mv^2}{2}\right) + kq^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) = mvu = vq\sqrt{2mk\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}.$$

4. Чтобы углекислый газ стал подниматься, его плотность должна быть меньше плотности воздуха (при том же давлении):

$$\rho = \frac{\mathrm{M}p}{RT},\quad \rho_0 = \frac{\mathrm{M}_0 p}{RT_0},\quad \frac{T}{T_0} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}_0} \approx 1{,}5.$$

5. При медленном покачивании доски тело остается относительно нее неподвижным благодаря силе трения, если ее максимальное значение $F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha \ge m\sqrt{a^2 + (g\sin\alpha)^2}$, где a – ускорение при покачивании доски, а $mg\sin\alpha$ – «скатывающая» сила. При кратковременных ударах ускорение доски $a > F_{\text{тр}}/m = \mu g\cos\alpha$, и за счет проскальзывания тело успевает немного сползти вниз под действием «скатывающей» силы. Несмотря на большое ускорение, смещение доски вбок как в одну, так и в другую сторону мало из-за кратковременности удара. Доска практически остается на месте, малые же сползания тела по ней складываются.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А.И.ГЕРЦЕНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(-1;\ 3)$. **2.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. **4.** $\frac{1}{2}$; 2. **5.** $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)\cup\left[4;+\infty\right)$. **6.** 74 или 47. **7.** $\frac{1}{9}$. **8.** $x_2=-3$, $x_3=2$, $a=0$. **9.** $\frac{S}{6}\cdot\frac{\sqrt{S\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1\right)}}{\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Вариант 2

1. $(-5;-2)\cup[1;+\infty)$. **2.** $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. **3.** $\sqrt{17}$. **4.** 2400.

5. $\left(-\infty;\log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **6.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** 441 г. **8.** Нет решений при $a<0$; 2 решения при $a=0$ и $a<2$; 3 решения при $a=2$; 4 решения при $0<a<2$. **9.** $\frac{H^3}{3}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К.Э.ЦИОЛКОВСКОГО (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -8. **2.** 2. **3.** $\frac{3}{4}\pi$. **4.** 6. **5.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **6.** 14.

7. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **8.** $\frac{1}{2}$. **9.** $\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$. **10.** $\frac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$.

Вариант 2

1. 8. **2.** 5. **3.** $-\frac{\pi}{2}$. **4.** 8. **5.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **6.** 17.

7. $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.** $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. **10.** $\frac{-1\pm\sqrt{73}}{4}$.

Вариант 3

1. 7. **2.** $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

3. Круговое кольцо с внешним радиусом R и внутренним $\frac{R}{2}$.

4. $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{2}$. **5.** 3. **6.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 4). **2.** 3). **3.** 2). **4.** 2). **5.** 1). **6.** 4). **7.** 5). **8.** 5). **9.** 3). **10.** 1).

Вариант 2

1 3). **2.** 3). **3.** 1). **4.** 2). **5.** 4). **6.** 2). **7.** 4). **8.** 5). **9.** 4). **10.** 1).

Вариант 3

1. $v=\sqrt{\frac{3p}{\rho}}\approx 650$ м/с. **2.** Удержится; $F_{тр}=0{,}5$ Н.

3. $t=\frac{\lambda}{4c}=5\cdot10^{-8}$ с. **4.** $R_2=\frac{r^2}{R_1}=12{,}8$ Ом.

5. $\eta=\frac{A_{41}}{1{,}5\nu R\left(T_2-T_1\right)+2A_{41}}=0{,}24=24\%$.

6. $F_{max}=\frac{U^2}{kZ}\approx 3{,}4\cdot10^{-3}$ Н.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМ. И.М.ГУБКИНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 0,8. **2.** -4. **3.** -3. **4.** -3. **5.** 3. **6.** 9. **7.** 3. **8.** 30.

9. 29. *Указание.* Перепишите исходное неравенство в виде $x^6+20\sqrt{10}>ax^2$. Значение $x=0$ ему удовлетворяет при любом значении a. При $x\neq0$ разделите обе части неравенства на x^2: $\frac{x^6+20\sqrt{10}}{x^2}>a$ и рассмотрите при $x\neq0$ функцию $y=\frac{x^6+20\sqrt{10}}{x^2}$. Найдите с помощью производной ее минимум.

10. 10. **11.** 4. **12.** 16.

Вариант 2

1. 1. **2.** -2. **3.** 11. **4.** $-0{,}4$. **5.** 11. **6.** 27. **7.** 2. **8.** -5. **9.** 3. **10.** 6. **11.** 116. **12.** 3.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $h=20$ м. **2.** 9. **3.** $h=40$ м. **4.** 2. **5.** $C=80$ пФ. **6.** $l=900$ м. **7.** $v=6$ см/с. **8.** 17. **9.** $h=40$ см.

10. Правило моментов относительно нижнего конца палочки имеет вид (рис.10)

$$mgR-F_A\frac{h}{2}\operatorname{ctg}\alpha-NH=0.$$

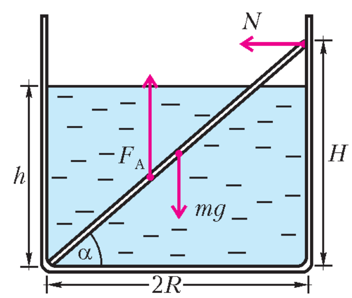


Рис. 10

Действующая на погруженную часть палочки сила Архимеда равна

$$F_A=\rho_ж\frac{h}{H}Vg=\frac{\rho_ж}{\rho}\frac{h}{H}mg,$$

где $V=m/\rho$ – объем палочки. Получаем уравнение

$$mgR-mgR\frac{\rho_ж}{\rho}\frac{h^2}{H^2}-NH=0,$$

откуда находим искомую плотность материала палочки:

$$\rho=\frac{\rho_ж\frac{h^2}{H^2}}{1-\frac{H}{R}\frac{N}{mg}}=1200\ кг/м^3.$$

11. Чтобы пробка пришла в движение, увеличение силы давления газа на пробку должно быть равно силе F, с которой вытаскивали пробку без нагревания:

$$\left(p_2-p_1\right)S=F.$$

Конечное давление связано с начальным уравнением изохорного процесса:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{T_2}{T_1}.$$

Получаем

$$T_2=T_1\left(1+\frac{F}{p_1S}\right)=490\ К=217\ °C.$$

12. Запишем второй закон Ньютона для установившегося движения перемычки (рис.11):

$$mg\sin\alpha - F_A\cos\alpha = 0,$$

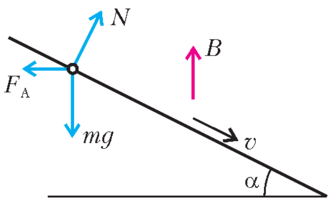


Рис. 11

где $F_A = IBl$ – сила Ампера. Сила тока выражается через закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

где $\mathcal{E} = Bvl\sin(90° + \alpha)$ – ЭДС, возникающая в проводнике при движении в магнитном поле. Для скорости перемычки получаем

$$v = \frac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2\cos^2\alpha} = 2 \text{ м/с}.$$

Вариант 2

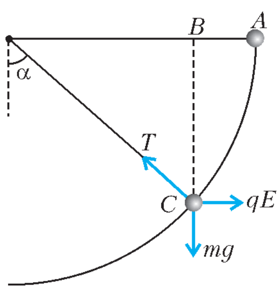


Рис. 12

1. $s = 7$ м. **2.** $a = 10$ м/с^2. **3.** $A = 60$ Дж. **4.** $V = 500$ см^3. **5.** 5%. **6.** $P = 92$ Вт. **7.** $W = 12$ Дж. **8.** $d = 30$ см. **9.** $F = 150$ Н.

10. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вдоль нити к точке подвеса (рис.12):

$$T - mg\cos\alpha - qE\sin\alpha = m\frac{v^2}{l}.$$

Квадрат скорости можно найти из теоремы о кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = A_{эл} + A_т = qE(l - l\sin\alpha) + mgl\cos\alpha.$$

При вычислении работы мы заменили реальную траекторию (дугу окружности) перемещением по линии ABC, опираясь на то, что работа и электростатического поля и поля тяжести не зависит от траектории. Для искомого натяжения нити получаем

$$T = 3mg\cos\alpha + qE(3\sin\alpha - 2) = 112 \text{ мН}.$$

11. $x = 80$ м.

12. В момент отрыва магнита от плиты сила реакции опоры N обращается в ноль: $F - mg - F_м = 0$, где $F_м$ – сила притяжения магнита к плите. При вертикальных колебаниях плиты уравнение движения магнита имеет вид $N - mg - F_м = ma_y$. Поскольку $a_y = -\omega^2A\sin\omega t$, получаем

$$N = mg + F_м - m\omega^2A\sin\omega t = F - m\omega^2A\sin\omega t.$$

Если $\omega < \sqrt{F/(mA)}$, то магнит все время прижат к плите ($N > 0$). Минимальная частота, при которой N обращается в ноль, равна

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{mA}} = 40 \text{ рад/с}.$$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $4x - 3$. **2.** $(-1; 3)$. **3.** $\frac{11}{2}$. **4.** 20%. **5.** $[-3; 6]$. **6.** 96. **7.** 3. **8.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **9.** –3. **10.** $b > a$. **11.** 1. **12.** 5. **13.** –7. **14.** $-\frac{1}{2}$; 1. **15.** $[2; 6]$. **16.** $\left[-\frac{1}{8}; 3\right]$. **17.** 2; **18.** 18. **19.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}$. **20.** 1; $10 \pm 3\sqrt{11}$.

Вариант 2

1. $a - 1$. **2.** $\sqrt[3]{2} - 1$. **3.** –1. **4.** 1. **5.** $(-\infty; 1]$. **6.** 1. **7.** $y = \left(e^x + e^{-x}\right)/2$. **8.** $[0; 1]$. **9.** $\pi/18$. **10.** $(0; 2/3]$. **11.** –1; 0. **12.** $(1; 2]$. **13.** 86. **14.** –2. **15.** $(1; 1); (2; 2)$. **16.** 3. **17.** $(0; 0); (4; 2)$. **18.** $2\sqrt{13}; \sqrt{61}$. **19.** 5. **20.** $(-\infty; -1) \cup [0, +\infty)$.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 4 или 16. *Указание.* Вершины квадрата, лежащие на параболе, имеют одинаковые ординаты, поэтому они симметричны относительно прямой $x = -\frac{3}{2}$. Значит, их абсциссы имеют вид $-\frac{3}{2} \pm a$ $(a > 0)$.

2. –1; $\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$. *Указание.* Выполните замену $y = x\sqrt{\frac{x-3}{x}}$.

3. $\left(-\infty; \log_{3/4} 4\right) \cup \left(0; \log_{3/2} 2\right)$. *Указание.* При $x > 0$ неравенство приводится к виду $t^2 - t - \frac{3}{4} > 0$, где $t = 2^{\frac{1}{x}}$, а при $x < 0$ – к системе $t^2 - t - \frac{3}{4} < 0$, $t^2 - \frac{3}{4} > 0$.

4. $\frac{4-\sqrt{2}}{7}$. Пусть треугольник MNK – сечение тетраэдра, содержащее грань призмы, L – середина MN, h – высота призмы, $k = \frac{MN}{CD}$ (рис.13). Тогда $MN = 2k$, $MK = KN = k\sqrt{3}$,

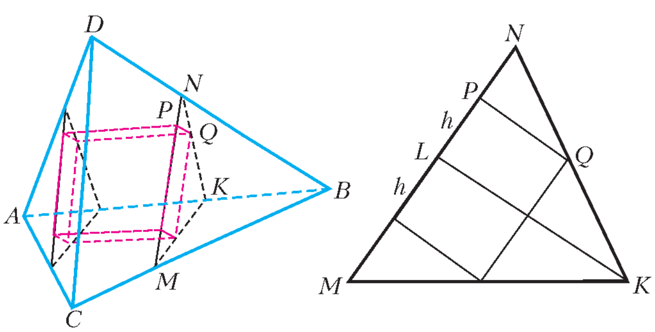


Рис. 13

откуда $LK = k\sqrt{2}$. Из подобия треугольников NPQ и NLK

$$\frac{\frac{1}{2}MN - h}{h} = \frac{\frac{1}{2}MN}{LK} \Leftrightarrow \frac{k}{h} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow h = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = k\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Кроме того,

$$k = \frac{BM}{BC} = 1 - \frac{EM}{AB} = 1 - \frac{2h}{2} = 1 - h.$$

Поэтому

$$h = (1-h)\left(2 - \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow h = \frac{2-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{4-\sqrt{2}}{7}.$$

5. $n = 5$. Заметим, что при $n = 1$ решений на $(0;1)$ нет. При $n \geq 2$ мы получим $2\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n-1}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi k}{n+1}$ или $x = \frac{\pi(2k+1)}{n-1}$, $k \in \mathbf{Z}$. Первая серия не пересекается с $(0; 1)$ в случае $2\pi \geq n + 1 \Leftrightarrow n \leq 5$ и пересекается с $(0; 1)$ единственный раз при условии

$$\frac{1}{2} \le \frac{2\pi}{n+1} < 1 \Leftrightarrow 2\pi - 1 < n \le 4\pi - 1 \Leftrightarrow 6 \le n \le 11 .$$

Вторая серия не пересекается с $(0;1)$ в случае $\pi \ge n - 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow n \le 4$ и пересекается с $(0;1)$ единственный раз, если $\frac{1}{3} \le \frac{\pi}{n-1} < 1 \Leftrightarrow \pi + 1 < n \le 3\pi + 1 \Leftrightarrow 5 \le n \le 10$. В ответ входят те n, при которых одна из серий не пересекается с $(0;1)$, а другая пересекается с $(0;1)$ ровно один раз. Это происходит только при $n = 5$.

Вариант 2

1. 10. **2.** $\frac{1}{35}$; 1.

3. $2\pi k$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\frac{7\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; 5\right)$, $\left(5 \pm \sqrt{5};\ 5 \mp 5\sqrt{5};\ \pm 5\sqrt{5} - 15\right)$. **5.** $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Вариант 3

1. 12. **2.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}; 0\right] \cup \left[1; \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{37}}{2}; +\infty\right)$. **4.** 42. **5.** 0; 2.

XXXVII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Задача 1

1.1. $T = 3$ дня $= 2{,}6 \cdot 10^5$ с, $\omega = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ рад/с.

1.2. $T_1/T_2 = 1{,}4$, $R_1/R_2 = 1{,}6$.

2.1. $v_1 = 9{,}2 \cdot 10^4$ м/с, $v_2 = 1{,}6 \cdot 10^5$ м/с. **2.2.** $m_1/m_2 = 1{,}7$.

2.3. $r_1 = 3{,}6 \cdot 10^9$ м, $r_2 = 6{,}4 \cdot 10^9$ м. **2.4.** $r = 1{,}0 \cdot 10^{10}$ м.

2.5. $m_1 = 6 \cdot 10^{30}$ кг, $m_2 = 3 \cdot 10^{30}$ кг.

3.1. $\alpha = 4$. **3.2.** $L_1 = 5 \cdot 10^{28}$ Вт, $L_2 = 6 \cdot 10^{27}$ Вт.

3.3. $d = 100$ световых лет. **3.4.** $\theta \approx 10^{-8}$ рад. **3.5.** $D = 50$ м.

Задача 2

1.1. $F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$. **1.2.** $x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A k}$.

1.3. $U = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}\left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A k d}\right)$. **1.4.** $\frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A k d}\right)^{-1}$.

1.5. $W = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A}\left(1 - \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 A k d}\right)$. **2.1.** $Q_1 = \frac{\varepsilon_0 A U}{d - x}$, $Q_2 = \frac{\varepsilon_0 A U}{d + x}$.

2.2. $F = \frac{\varepsilon_0 A U^2}{2}\left(\frac{1}{(d - x)^2} - \frac{1}{(d + x)^2}\right)$.

2.3. $F = \frac{2\varepsilon_0 A U^2}{d^3} x$. **2.4.** $F_c = -k_{эф} x = -2\left(k - \frac{\varepsilon_0 A U^2}{d^3}\right) x$.

2.5. $a = -\frac{2}{m}\left(k - \frac{\varepsilon_0 A U^2}{d^3}\right) x$.

3.1. $U^* = U \frac{2\varepsilon_0 A x}{C^*\left(d^2 - x^2\right) + 2\varepsilon_0 A d}$. **3.2.** $U^* = U \frac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 C^* + 2\varepsilon_0 A d}$.

4.1. $\frac{F}{F_у} = \frac{\varepsilon_0 A U^2}{k_{эф} d^3} = 7{,}6 \cdot 10^{-9}$. **4.2.** $x_{\max} = \frac{Ma}{k}$.

4.3. $C^* = 8{,}0 \cdot 10^{-11}$ Ф.

4.4. $t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} = (0{,}3 - 0{,}5)$ с, где $l = (0{,}4 - 1)$ м – расстояние до руля.

4.5. $t_2 = \pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 0{,}019$ с $< t_1$.

Задача 3

1.1. $[h] = ML^2T^{-1}$, $[c] = LT^{-1}$, $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$, $[k_Б] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

1.2. $[\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$. **1.3.** $\alpha = -3$, $\beta = -2$, $\gamma = 0$, $\delta = 4$.

2.1. $\alpha = 2$, $\beta = -4$, $\gamma = 2$. **2.2.** $[S] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

2.3. $\eta = \frac{c^3 k_Б}{Gh}$. **3.1.** $\theta_Н = \frac{c^3 h}{2Gk_Б m}$. **3.2.** $\frac{dm}{dt} = -\frac{c^4 h}{16G^2 m^2}$.

3.3. $t^* = \frac{16G^2 m^3}{3c^4 h}$. **3.4.** $C_V = -\frac{2Gk_Б m^2}{ch}$.

4.1. $\frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2 m^2} + \frac{G^2 k_Б^4 \theta_Б^4 m^2}{c^8 h^3}$. **4.2.** $m^* = \frac{c^3 h}{2Gk_Б \theta_Б}$.

4.3. $\frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2 m^2}\left(1 - \frac{m^4}{m^{*4}}\right)$. **4.4.** $\theta^* = \frac{c^3 h}{2Gk_Б m^*} = \theta_Б$.

4.5. Равновесие неустойчивое.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, А.В.Жуков, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.М.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

Шахматные моды в ГУМе

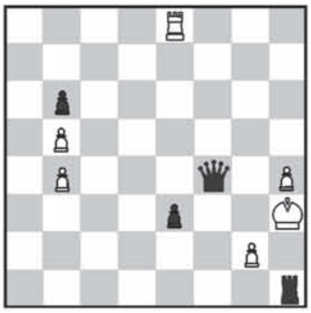
В Москве в конце минувшего года состоялся чемпионат мира по блицу. В ожесточенной двухдневной борьбе между Виши Анандом и Василием Иванчуком все решилось в последнем туре. Фортуна улыбнулась украинскому гроссмейстеру, завоевавшему титул блиц-короля.

Чемпионат проходил в самом центре страны – на Красной площади, в Демонстрационном зале ГУМа. Собралось двадцать гроссмейстеров: чемпион мира по классическим шахматам Вишванатан Ананд, экс-чемпионы Владимир Крамник и Анатолий Карпов, сильнейшие россияне Грищук и Морозевич, претенденты на корону Адамс, Бакро, Гельфанд, Иванчук, Карлсен, Леко, Пономарев, Широв и др.

Блиц – самая популярная разновидность шахмат, тем удивительнее, что данный чемпионат мира – всего лишь третий по счету. Примечательно, что в первом из них, прошедшем почти 20 лет назад – в 1988 году в Канаде, победил Михаил Таль, которому и был посвящен этот праздник. Кстати, то давнее достижение Таля надо признать настоящим подвигом – несмотря на неважное здоровье, он добрался до финала, где разгромил Ваганяна 3,5:0,5. А ведь в чемпионате (по олимпийской системе) участвовали 32 известных гроссмейстера, в том числе тогдашние чемпионы мира по разным версиям Каспаров и Карпов. Вторым чемпионом мира четверть века спустя стал Александр Грищук, намеревавшийся повторить успех во второй раз.

После первого дня вперед вышел Василий Иванчук. Но в середине первого круга Василий зевнул Борису Гельфанду мат в 1 ход, такое у гроссмейстеров даже в молниеносной игре встречается нечасто.

Иванчук – Гельфанд



Только что король белых стоял на h2 (а черная ладья на b1), и они легко делали ничью – достаточно 48. g3+, и королю не уйти от шахов. Но последовало **48. ♔h2-h3?? b1-h1**.

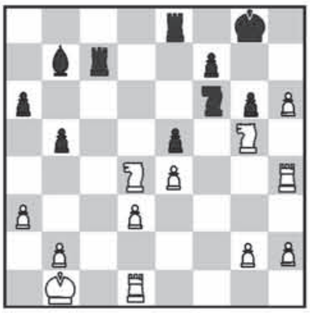
Вот такая трагедия. Как раз в этот момент был объявлен большой перерыв, и Иванчук в гордом одиночестве провел целый час, никто не решался приблизиться к нему. Трудно сказать, о чем он думал, но когда игра возобновилась, взял себя в руки и больше таких проколов не допускал.

Во второй день Ананд быстро подтянулся к лидеру, и весь второй круг они прошли рядом, по очереди вырываясь вперед. Перед последним туром Ананд и Иванчук имели поровну очков, и уже никто не мог вмешаться в их спор. Решающая партия закончилась неожиданно.

Ананд – Иванчук

Сицилианская защита

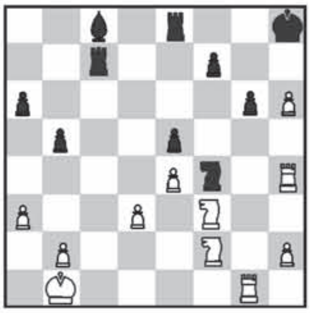
1. e4 c5 2. ♘f3 e6 3. d4 cd 4. ♘:d4 a6 5. ♗d3 ♗c5 6. ♘b3 ♗a7 7. ♕e2 ♘c6 8. ♗e3 d6 9. ♘bd2 ♘f6 10. f4 0-0 11. ♗:a7 ♖:a7 12. g4 b5 13. 0-0-0 ♖c7 14. ♖hg1 ♕e7 15. ♔b1 ♘fd7 16. g5 ♗b7 17. ♖g3 ♘b4 18. ♕g4 ♗fc8 20. ♕h4 ♘f8 21. a3 ♘:d3. После 21... ♘:c2 22. ♖c1 конь в ловушке. **22. cd h5 23. gh ♕:h4 24. ♖:h4 ♘h7 25. ♘d4 ♘f6 26. ♘2f3 ♖ce8 27. ♘g5 e5 28. fe de.**



Краткое содержание предыдущих ходов. Как и положено в этом варианте, белые атаковали на королевском фланге, черные пытались получить контригру на ферзевом. Но на этом участке доски у Иванчука ничего не вышло, и, чтобы избежать больших неприятностей с другой стороны, он отдал пешку, разменяв ферзей. Впрочем, это не облегчило положения, и сейчас Ананд мог добиться решающего перевеса. К цели вело логичное 29. h7+! Теперь в случае 29... ♔g7 решало 30. ♘ge6+! fe 31. ♘:e6+ и 32. ♘:c7, а на отступление короля в угол – 29... ♔h8 следовало 30. ♖f1 ed 31. ♖:f6, и черные беспомощны.

В итоге Ананд становился чемпионом мира и по третьей версии – блицу (классическая и «быстрая» корона уже уместились у него на голове).

29. ♘df3? Разумеется, в обычной партии Ананд легко нашел бы шах крайней пешкой, но блиц есть блиц... **29... ♘h5.** Увы, атака белых отбита, сдвоенная пешка не имеет значения, и перевес уже на стороне черных. **30. ♖dg1 ♔h8 31. ♘h3 ♗c8 32. ♘f2 ♘f4.**



Второй критический момент. Тут Ананд должен был действовать следующим образом: 33. d4 ♘e2 34. ♖d1 g5 34. ♖h5 f6 35. h7 ed 36. ♖h6 ♖:h7 38. ♖:h7+ ♔:h7. У черных лучше, но ничейный исход вполне вероятен. Зрители, окружившее плотным кольцом играющих, были бы только рады продлить удовольствие, увидеть дополнительную блиц-партию между двумя корифеями. Но им не повезло...

33. ♘:e5?? Это уже настоящий зевок. **33... ♘e2 34. ♖e1 ♘d4.** Теперь материальные потери белых слишком велики. **35. ♘eg4 ♘f3.** Убийственная вилка. **36. ♘f6 ♖d8 37. ♘d5 ♖b7. Белые сдались.** Как видите, в предыдущем случае Иванчук не совсем заслуженно проиграл, а в этом не совсем заслуженно выиграл.

Если Ананд уже много лет чувствует себя комфортно на Олимпе, а два месяца назад вообще покорил его вершину, то у Иванчука в решающий момент часто что-то не складывалось. Так, шесть лет назад на чемпионате мира ФИДЕ в Москве он как никогда был близок к триумфу, все были уверены, что в финальном поединке Василий одолеет Руслана Пономарева. Однако в битве двух украинских гроссмейстеров счастье было на стороне его 18-летнего соперника, ставшего самым молодым чемпионом мира в истории. А его более опытному партнеру досталась приставка «вице». Так что есть своя справедливость в том, что Иванчук – тоже чемпион мира, пусть и по блицу.

Вот результаты чемпионата: 1. Иванчук – 25,5 из 38; 2. Ананд – 24,5; 3–4. Грищук и Камский – 23,5; 5–7. Крамник, Леко и Рублевский – 21,5; 8. Морозевич – 21; 9. Карлсен – 20,5; 10–11. Адамс и Мамедьяров – 18,5; 12. Пономарев – 18; 13. Касымжанов – 17,5; 14–17. Гельфанд, Дреев, Савченко и Широв – 16; 18. Карпов – 14; 19. Бакро – 12; 20. Коротылев – 11,5.

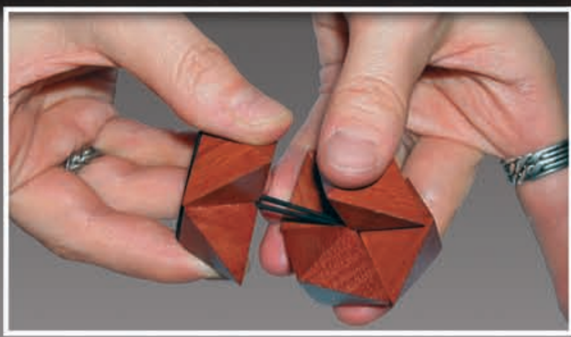
Е.Гик

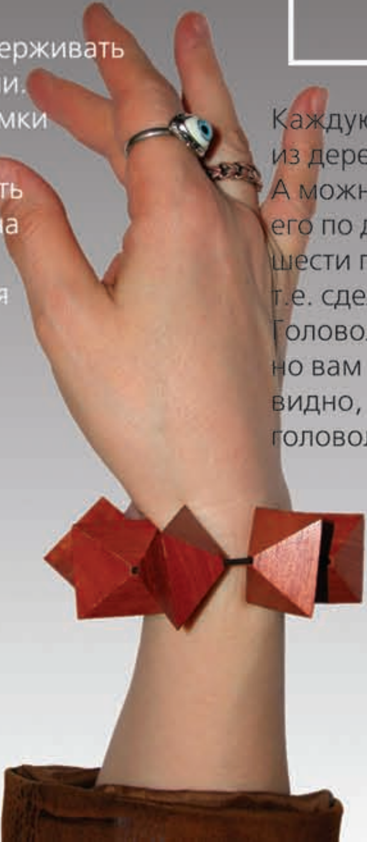
Индекс 70465

Браслет-головоломка

КоллекцияКоллекцияКоллекция Головоломок

Браслет, придуманный американкой Марти Райс, состоит из замкнутой в кольцо шляпной резинки и нанизанных на нее шести одинаковых элементов в форме октаэдров. Задача заключается в том, чтобы превратить браслет в выпуклый многогранник. При этом резинка должна прочно удерживать многогранник в собранном состоянии. Каждый элемент браслета-головоломки состоит из двух равных пирамидок, склеенных основаниями. Особенность пирамидок в том, что их высота равна половине стороны квадратного основания — в этом суть изобретения Марти Райс.





Каждую деталь головоломки можно вырезать из деревянного бруска квадратного сечения. А можно взять деревянный кубик, распилить его по диагоналям сторон и из полученных шести пирамидок склеить три октаэдра, т.е. сделать половину головоломки. Головоломка достаточно трудна в решении, но вам поможет фотография, на которой видно, как проходит резинка, удерживающая головоломку в собранном состоянии.

(Продолжение — на с.56)